Fyzikálny korešpondenčný seminár
26. ročník, 2010/2011
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola zimnej časti 2010/2011

2.1 Holubník (opravovala Kamila, vzorák Jakub a Kamila)

Zuzka mala obrovskú krabicu z ty-bisťu mňam ľahkého materiálu. Do tej krabice zavrela 100 ton holubov a celé to postavila na obrovské váhy. Tie ukázali na svojom ciferníku 100 ton. Zrazu si všetky holuby povedali, že vzlietnu a vyleteli až po vrch krabice, kde aj zostali trepotajúc krídlami. Čo však Zuzku prekvapilo, bola hodnota, ktorú teraz ukázali váhy. Viete zistiť, aká to bola hodnota a vysvetliť, prečo ju váhy ukazovali?

Síce som ešte nikdy nevidela váhu, ktorá by vedela odvážiť 100 ton, ale nič mi nebráni v tom, aby som si ju vedela predstaviť. Má to byť váha a teda v určitých ohľadoch musí byť veľmi podobná bežným váham. Taká váha reaguje na akúkoľvek silu, ktorá na nich pôsobí (nech to je tiažová sila telesa postaveného na nej, či sila prítlaku rukou). Taká presnejšia váha nameria nenulu dokonca aj vtedy, keď na ňu iba riadne fúkneme. O našej megaváhe môžeme predpokladať to isté – že hmotnosť, ktorú ukáže, je vlastne F/g, kde F je sila, ktorou na váhu pôsobí dno škatule.

Teraz sa poďme pozrieť, čo sa deje, keď holuby sedia na dne škatule. Keďže škatuľa má minimálnu hmotnosť, tak na váhu sama o sebe takmer nepôsobí. Ale holuby sedia na dne, teda svojou gravitačnou silou tlačia na dno, ktoré tým pádom zatlačí na váhu – váha ukáže 100 ton.[1] To je ľahké.

Ale vtom všetky holuby vzlietli a ani jeden sa už nedotýka dna škatule. Mohlo by sa teda zdať, že váha už nebude nič ukazovať. Podľa zadania zostali holuby v čase druhého merania trepotajúc krídlami pri vrchu škatule. Takáto situácia je prehľadná – nazvime holuby spolu so vzduchom v škatuli a škatulou samotnou naším systémom. Podľa zadania sa holuby v krabici nehýbu. Dá sa očakávať, že aj prúdiaci vzduch hnaný holubmi bude prúdiť stacionárne (nepremenlivo v čase, stále rovnako). Škatula sa prirodzene nehýbe tiež. To znamená, že ťažisko nášho systému je nehybné a to na oplátku znamená, že sily pôsobiace na systém zvonka sú nutne v rovnováhe. Vonkajšie sily sú len tiažová, vztlaková a reakčná sila k sile, ktorou dno krabice tlačí na váhu. Tieto tri sily budú evidentne v rovnakej rovnováhe ako v prípade, keď holuby sedeli na dne – lebo celková tiaž sa nezmenila, vztlaková sila tiež nie, nutne teda ani sila na váhu. Tým pádom nám váha opäť ukáže 100 ton.[2]

Newtonov pohybový zákon nám dal odpoveď na otázku. Odvodenie bolo čisté, jednoduché, ale možno sme ním napriek tomu nezískali vhľad do problému. Ako je to možné, že váha „cíti“

[1] Rýpalovia by sa mohli spýtať na to, prečo neuvažujem hmotnosť vzduchu v krabici? Veď keď je to obrovská krabica, tak je v nej aj spústa vzduchu, ktorý tiež niečo váži! Nuž, jednoduchá pomoc – nakoľko váženie krabice prebieha v atmosfére, tak na krabicu pôsobí vztlaková sila vzduchu, ktorá má práve rovnakú veľkosť ako je tiaž vzduchu v krabici, len pôsobí nahor.

[2] Podstatné pri tomto postupe bolo to, že ťažisko systému bolo nehybné! Tento argument by sa teda nedal použiť na určenie údaju na váhe pri vzlietaní či pristávaní holubov inak ako kvalitatívne.

holuby pri vrchu krabice? Je to podobná otázka, ako otázka, ako vlastne vtáky (lietadlá,...) lietajú. Zjednodušene to môžeme povedať tak, že sa akoby opierajú o vzduch. Teda tlačia (nadol) a ťahajú (zhora) ho nejakou výslednou silou, a rovnakou (len opačným smerom) aj vzduch tlačí a ťahá na ne podľa zákona akcie a reakcie. Ale tu máme rovnakú silu smerom dole, ktorá tlačí na vzduch rovno pod a ťahá vzduch nad holubom. Ak sa vzduch nemá vo výsledku stále urýchľovať, čo nemôže – veď je uzavretý v krabici – tak musí pôsobiť príslušnou silou na steny krabice. Znovu podľa akcie a reakcie musí potom rovnakou silou pôsobiť aj vzduch na škatuľu. A tu je pes zakopaný! Zrazu sme našli silu, ktorá pôsobí na steny škatule. Škatuľu považujeme za pevnú a je jej teda jedno, či všetka pôsobiaca sila na ňu pôsobila iba tlakom na dno alebo či sa táto sila rozložila na ťah vršku krabice, tlak na dno a trenie na boku. No, to je teda celé. Dobré, nie?

2.2 Kofola (opravovala Halucinka, vzorák Tinka a Jakub)

Po jej vypití by sme radi očistili 1,5 litrovú fľašu od zbytkov kofoly. Vždy, keď je fľaša prázdna, zostane v nej 1 ml kvapaliny ako kvapky prichytené niekde o stenu. Fľašu čistíme tak, že napustíme pol litra čistej vody, zatrepeme a vylejeme. Koľko krát musíme takto prepláchnuť fľašu, aby sa v nej už (priemerne) nenachádzala žiadna molekula kofoly? (Molekulu kofoly si môžete predstaviť ako molekulu veľmi podobnú vode, ale rozlíšiteľnú od nej.)

Keď fľašu pretrepeme a zvyšná kvapka kofoly sa rovnomerne rozriedi vodou, tak koncentrácia kofoly klesne 500-násobne. Totiž, po doliatí vody sme zpäťstonásobili objem pri zachovanom počte „kofolových“ molekúl. Nové rezíduum, ktoré zostane na stene po vyliatí, bude mať zrejme rovnakú koncentráciu kofoly ako roztok po premiešaní. Teda po vyliatí bude vo fľaši 500-krát menej molekúl kofoly. Keď to zopakujeme, stane sa presne to isté, len s menším počtom molekúl na začiatku. Otázka teda znie, koľkokrát musíme vydeliť počet molekúl kofoly 500-kou, aby nám zostalo niečo naozaj malé. Nula to nebude, ale ak nám vyjde niečo menšie ako 0,5, znamená to, že v priemere tam už žiadna molekula nie je.

Paráda, už len zistiť, koľko to teda máme molekúl. Vraj máme považovať kofolu za niečo ako vodu. O tej vieme, že jeden mól ($6{,}022 \times 10^{23}$ molekúl) váži 18 gramov, čo je zároveň 18 mililitrov. V našom pôvodnom mililitri teda máme $N \approx 3{,}34 \times 10^{22}$ molekúl. A už sa len pohrať s kalkulačkou a donekonečna stláčať = (pre tých menej chápavých: akože deliť 500-kou znovu a zasa).[3] A ani nie tak donekonečna. Po 9-ich razoch mi tam zostala nejaká necelá pätdesiatina molekuly. Svižné. A ak ste si pozerali, ako rýchlo vám klesali čísla, tak ste úspešne spozorovali, aké potvorské sú tie exponenciály.

2.3 Osvit Mesiacom a Zemou (opravovala Tinka, vzorák Jakub a Tinka)

Určte pomer osvitu Mesiacom na Zemi počas splnu a osvitu Zemou na Mesiaci v čase o pol mesiaca neskôr. Ak potrebujete nejaké údaje, tak si ich odhadnite alebo nájdite v tabuľkách.

[3] Komu sa táto metóda zdá príliš nematematická a/alebo je znalý logaritmov, ten zistí, že vlastne potrebujeme riešiť úlohu $N/500^n < 0{,}5$, kde n je počet premytí fľaše. To sa dá počítať logaritmovaním

$$\log N - n \log 500 = \log\left(\frac{N}{500^n}\right) < \log 0{,}5$$
$$\frac{\log N - \log 0{,}5}{\log 500} < n\ .$$

Tento príklad mnohých z vás odradil, hoci nebol až taký ťažký. Áno, veľa vecí v ňom zdanlivo chýbalo. Ale aj to je úlohou správneho fyzika, doplniť chýbajúce údaje a vhodným spôsobom dodefinovať neurčené.

Prvá zásadná otázka je – čo je to sakra ten osvit? Podľa mňa je rozumné za osvit Zeme Mesiacom chápať veličinu, ktorá mi hovorí, ako dobre som schopný vidieť v noci osvetlenej Mesiacom. Z konkrétnych fotometrických (prípadne rádiometrických) veličín[4] si môžem vybrať napr. intenzitu osvetlenia[5] v smere prichádzajúcich lúčov – ak si intezitu osvetlenia predstavím ako svetelný tok prechádzajúci jednotkovou referenčnou plochou, tak si teda tú myslenú plochu, ktorou prúdi ten svetelný tok, orientujem tak, aby bola kolmá na lúče odrazené z Mesiaca[6], ktoré sú prakticky rovnobežné).

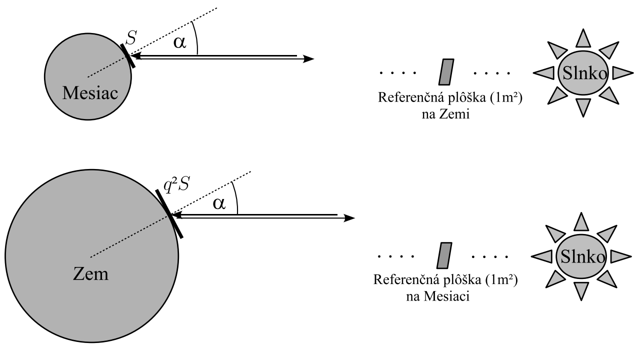
Druhou otázkou je, prečo vlastne vďaka mesačnému svetlu vidíme veci tu, na Zemi. Skrátka preto, že na Mesiac dopadá svetlo zo Slnka a on časť dopadnutého svetla odrazí smerom na Zem, kde časť dopadne na pozorovaný objekt, od ktorého sa časť odrazí mne do oka. Odráža sa samozrejme iba z tej časti, ktorá je osvetlená a to sa v priebehu mesiaca vďaka jeho obehu okolo Zeme mení a my pozorujeme rôzne mesačné fázy. Ako to vyzerá v splne a o pol mesiaca neskôr je ľahké nahliadnuť: situácie sú skoro rovnaké, len v druhom prípade si Mesiac a Zem vymenili úlohy. Čiže, o pol mesiaca po splne, keď my máme Mesiac v nove, majú pomesačťania Zem práve v splne.

Keď si uvedomíme, že uhlový polomer Mesiaca zo Zeme, či Zeme z Mesiaca je malý uhol (do 1 stupňa), tak môžeme odraz od ľubovolnej plôšky na Zemi smerom k Mesiacu (resp. od plôšky na Mesiaci smerom k Zemi) považovať za odraz späť – do smeru, odkiaľ lúč prišiel. Skúmajme príspevok k intenzite mesačného svetla dopadajúceho na Zem od ľubovolne vybratej osvetlenej plôšky na Mesiaci. Ak uhol kolmice (= normály) na túto plôšku zviera s lúčom zo Slnka uhol α (viď obrázok nižšie), tak na túto plôšku s obsahom S dopadá svetelný tok $\Phi = SJ\cos\alpha$, kde J značí dopadajúcu intenzitu osvetlenia zo Slnka. Časť tejto dopadnutej intenzity sa pohltí, a zvyšná časť (jej podiel je daný odrazivosťou, v astronómii nazývanej albedo) sa odráža všemožnými smermi. Nás zaujíma, aká časť sa odrazí v smere na referenčnú plochu na Zemi (viď obrázok). Hm, povedzme, že to bude nejaká časť a nazvime ju k. Dôležité je uvedomiť si, že toto tajuplné k, ktoré našťastie nepotrebujeme presne poznať, závisí len od uhla α a vzdialenosti referenčnej plochy. A to je fajn. Lebo keď sa pozriem na príspevok k intenzite zemského svetla dopadajúceho na Mesiac od plôšky na Zemi zvierajúcej s lúčmi zo Slnka rovnaký uhol α a pokrývajúcej na Zemi rovnakú časť povrchu ako pokrývala plôška S na Mesiaci, tak tam bude rovnaký faktor k, len iné albedo a iný obsah plochy. Konkrétne bude plôška na Zemi q^2-krát väčšia, kde $q = R_{\mathrm{Zem}}/R_{\mathrm{Mesiac}} \approx 3{,}67$.

[4]Ktoré sú mnohonásobne redundantné/nadbytočné a tým pádom zúrivo neprehladné a je s nimi jednoducho radosť pracovať!

[5]Nazýva sa aj hustota svetelného toku, či jednoducho osvetlenie. Meria sa v luxoch, značka lx, čo je lumen na štvorcový meter, značka $\mathrm{lm/m^2}$. Príslušná rádiometrická veličina zodpovedajúca intenzite osvetlenia je intenzita vyžarovania s jednotkou $\mathrm{W/m^2}$. Lumen je teda fotometrický ekvivalent watt-u.

[6]Keby som ako referenčnú plochu zobral vodorovný povrch, tak by mi intenzita závisela od zemepisnej polohy a zmysel by potom malo porovnávať intenzitu na odpovedajúcich si miestach na Zemi a na Mesiaci.

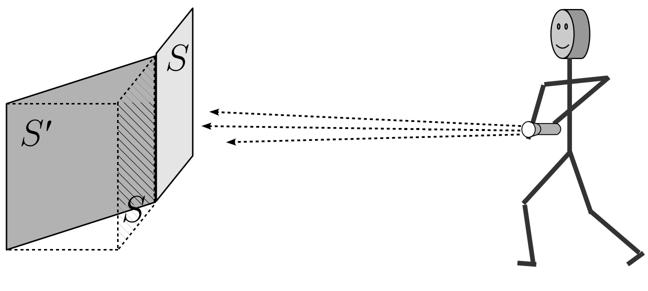


Obr. 1: Referenčné plôšky pre Zem a Mesiac

Keď teraz sčítame príspevky intenzít od všetkých odrazových plôšok na Mesiaci, a výslednú sumu porovnáme so sumou príspevkov intenzít v druhom prípade, t.j. príspevkov od plôšok na Zemi, tak vidíme, že tie sumy obsahujú presne rovnaké sčítance, len každý sumand v druhom prípade je prenásobený faktorom q^2w, kde $w = \frac{\text{albedo}_{\text{Zem}}}{\text{albedo}_{\text{Mesiac}}}$.

Výsledok je už na dosah, už len zistiť to albedo. To je, ako to už vo fotometrii býva, taká empirická veličina.[7] Pre Mesiac je to zhruba 0,12 a pre Zem 0,30 až 0,39, kde to závisí od oblačnosti, zaľadnenia, atď. Zem teda odrazí približne 3-krát viacej dopadnuvšieho svetla ako Mesiac.

Číselne sme teda dostali, že osvit Zeme Mesiacom je zhruba 40-krát slabší ako osvit Mesiaca Zemou. Zdá sa to byť celkom sila, ale v skutočnosti by sme na Mesiaci asi aj tak boli oveľa viac fascinovaný tým, že nad hlavou máme Zem, ako tým, že je ten odraz tak silný. Oproti Slnku je to ešte stále 10000-krát menej.



Obr. 2: Intenzity pre plochu S a S’

Poznámka k riešeniam: Mnohí ste argumentovali úvahou obsahujúcou predpoklad, že množstvo odrazeného svetla je úmerné prierezu osvetleného telesa. Ukážeme si, že toto v bežnom prípade nie je pravda. Totiž, bežné telesá v našom okolí (ktoré neprodukujú vlastné svetlo ako

[7] Je to taký priemer cez všetko: totiž, odrazivosť vo všeobecnosti závisí od uhla, kam sa svetlo odráža. A dokonca aj od vlnovej dĺžky svetla, o ktoré sa jedná. Nuž a takýto priemer sa dá robiť mnohorako – napríklad sa dá priemerovať cez všetky viditeľné vlnové dĺžky s váhovou funkciou adekvátnou citlivosti oka na jednotlivé vlnové dĺžky a priemerovať cez polovičný priestorový uhol smerov, kam sa môže svetlo odrážať – to by bolo geometrické albedo. Ale dá sa priemerovať aj inak, napr. priemerovanie cez uhly urobiť adekvátne pre guľovité teleso – tak dostanem tzv. sférické albedo. Vyznať sa v tom poriadne si vyžaduje istú nemalú námahu.

napríklad môj monitor, na ktorom to píšem, a ktorý očividne nemá popisovanú vlastnosť) rozptyľujú svetlo difúzne – do všetkých smerov. A to veľmi špecificky – tak, že nech na ne pozeráme z hocijakej strany, vždy sa nám javia *rovnako svetlé* (či tmavé).[8] Teraz je vhodné si pozorne prezrieť obrázok vyššie: vidíme na ňom 2 plochy, ktoré vystavujú lúčom baterky rovnaký prierez S. Jedna z plôch je však kolmá na lúče a druhá je šikmá. Ak by bolo množstvo odrazeného svetla jednoducho úmerné prierezu osvetlených telies, tak by obe plochy odrážali rovnako veľa svetla a teda by sme ich videli rovnako svetlé.[9] To je ale zjavne zle, lebo intenzita dopadajúca na šikmú plochu je S'/S-krát menšia ako intenzita dopadajúca na kolmú plochu a teda šikmú plochu vidím menej svetlú.

2.4 Dúfam, že všetci máte nainštalovaný Excel (opravoval Mišo)

Máme 201 dokonale pevných pukov na ľade (bez trenia), každý rovnakej hmotnosti $10\,\mathrm{kg}$, polomeru $5\,\mathrm{cm}$ zoradených na priamke. Zrazu tomu najkrajnejšiemu udelíme rýchlosť $v = 50\,\mathrm{cm/s}$ smerom k ostatným. Koľko času uplynie medzi prvou a poslednou zrážkou? Polohy pukov v cm nájdete na stránke `http://fks.sk`.

Pozrieme sa na úlohu očami fyzika, teda lenivca, ktorému sa vôbec nechce počítať nejakých 201 pukov. Máme ideálnu situáciu, kde zanedbávame trenie a puky sú na jednej priamke a prvý puk urýchlime práve po tejto priamke. Preto všetky puky budú vždy alebo stáť alebo konať rovnomerný priamočiary pohyb neopúšťajúc pri tom danú priamku.

Teraz si rozoberme, čo sa deje pri zrážke. Keďže nezanedbávame rozmery pukov, treba si uvedomiť, že zrážka nastáva ešte predtým ako by sa stretli stredy pukov, ktorých polohy sú zadané v tabuľke. V momente zrážky je rozdiel v polohách pukov $d = 2r = 10\,\mathrm{cm}$.

V zadaní sa spomínajú dokonale pevné puky – čo naznačuje, že zrážky budú skôr pružné. Avšak dokonale pevné neznamená presne to isté ako dokonale pružné, takže sa úvahou nedajú vylúčiť ani úplne nepružné zrážky. Vo všeobecnosti sa dá zaviesť miera pružnosti v intervale od 0 (pre nepružné) do 1 (pre pružné zrážky), ktorá v ťažiskovej sústave určuje aká časť kinetickej energie ostane po zrážke v kinetickej energii, t.j. aká časť kinetickej energie sa nepremení na teplo. My sa nebudeme týrať nadmieru a úlohu vyriešime pre (dokonale) pružné zrážky. Využijeme pri tom vlastnosť, že pri dokonale pružnej zrážke dvoch rovnako ťažkých telies si tieto telesá „vymenia“ rýchlosti.[10] V tomto konkrétnom príklade narážajúci puk ide vždy rýchlosťou $v = 50\,\mathrm{cm/s}$ a narazený puk (pred zrážkou) stojí. Inými slovami, v celej sústave sa vždy pohybuje práve jeden puk a to rýchlosťou v.

Keď skombinujem tieto zistenia, tak si môžem uvedomiť, že celý proces presunu puku je akási štafeta, kde sa vždy hýbe len jeden puk. V momente zrážky narážajúci puk uvedie do pohybu ďalší puk, ktorý je už ale v tom momente o $10\,\mathrm{cm}$ ďalej – kvôli rozmerom pukov. Preto, ak si predstavím, že naozaj sa hýbe len jeden puk, tak ten puk si každou zrážkou „skráti“ cestu o $10\,\mathrm{cm}$.

Treba nám zistiť, akú dráhu prejde puk, keď vezmeme do úvahy tieto skratky. Je celkom intuitívne, že zrážok a teda aj skratiek, bude toľko, koľko je prejdených úsekov, teda toľko,

[8] Telesá s touto vlastnosťou sa odborne nazývajú lambertovské odrážače.

[9] Zamyslite sa nad tým prípadne aj dlhšie ako pol sekundy. Množstvo (alebo intenzita keď chceme byť exaktný) odrazeného svetla zodpovedá tomu, ako svetlé sa mi odrážajúce teleso javí. Táto myšlienka sa už v tomto vzoráku objavila, teraz sme ju šikovne použili.

[10] Kto neverí, môže si zo zákona zachovania energií a hybností zostaviť sústavu rovníc pre priamu zrážku a z nej vyjadriť vzťahy medzi rýchlosťami.

koľko je medzier. Prvá zrážka nastane až vtedy keď prvý puk v rade má prejdený svoj úsek – preto tento úsek nezapočítame do celkovej dráhy. Čiže namiesto 201 pukov máme 200 pukov so 199 medzerami. Po zohľadnení posunutia sústavy aj skratiek dostanem pre dráhu potrebnú na dosiahnutie polohy posledného puku: $11\,762\,\mathrm{cm} - 80\,\mathrm{cm} - 199 \cdot 10\,\mathrm{cm} = 9\,692\,\mathrm{cm}$. No a zo známeho vzorca $s = vt$ pre čas dostanem $t = 193{,}84\,\mathrm{s}$.

2.5 Vodné hrátky (opravoval Robo, vzorák Filip a Jakub)

Asi ste si všimli, že keď na vode pláva rôzny kentus, zdržuje sa niekedy pokope. V našej úlohe ho nahraďme zápalkami. Radi by sme teda vedeli, čo sa stane, ak položíme na hladinu dve zápalky blízko seba? Pritiahnu sa, odpudia, či sa nestane vôbec nič? A čo v prípade, keď jednu z nich obalíme vodo-odpudivým voskom? A čo ak obalíme obe? Prečo je to tak?

CHECKED BY JAKUB

Ako v zlej detektívke, prezraďme si pointu hneď na začiatku. Vodeodpudivý vosk nie je spomenutý v zadaní len tak náhodou. K vyriešeniu tohoto príkladu totiž treba uvažovať kapilárne efekty a „vodeodpudivosť“ sa snaží k tomu navádzať.

Určite si spomínate na školské obrázky, ako sa vodná hladina pri styku s iným telesom ohýba – nadol, ak ide o vodeodpudivú látku a nahor, ak ide o vodopríťažlivú. No a čo to spôsobí, ak je na vode zrazu takýchto telies viac blízko pri sebe?

Pri riešení nám pomôžu dve veci. Jednou z nich je známy fyzikálny princíp, že sústava sa snaží zaujať stav s minimálnou energiou. Inými slovami, povrch kvapaliny má byť minimálny.[11]

Tá druhá vec je veľa obrázkov, kde si tie hladiny budeme kresliť. Zaobídeme sa bez výpočtov. Zadanie sa nás pýta na tri rôzne prípady. Každý z nich rozoberme zvlášť.

«««¡ .mine Keď sú na vode dve zápalky, voda medzi nimi zaujme tvar U a voda na vonkajších stranách bude mať tvar poklesu J. Keď sa priblížia o $2dx$ k sebe (každá z nich o dx), tvar hladiny na vonkajších stranách sa nezmení. Iba sa to celé posunie v priestore o dx ďalej - ľavá doprava a pravá doľava. To je ako keby v nekonečne pribudlo dx rovnej hladiny na oboch stranách. [12] No hladina v tvare U sa zdeformuje na trochu iné U. Okrem toho, že sa jeho šírka zmenší o $2dx$ ======= Keď sú na vode dve zápalky, voda medzi nimi zaujme tvar U a voda na vonkajších stranách bude mať tvar poklesu J. Keď sa priblížia o $2dx$ k sebe (každá z nich o dx), tvar hladiny na vonkajších stranách sa nezmení. Iba sa to celé posunie v priestore o dx ďalej - ľavá doprava a pravá doľava. To je ako keby v nekonečne pribudlo dx rovnej hladiny na oboch stranách. (Aby sme „zaplátali“ tú dieru po posunutí.) No hladina v tvare U sa zdeformuje na trochu iné U. Okrem toho, že sa jeho šírka zmenší o $2dx$ »»»¿ .r412 a minimálna výška hladiny medzi zápalkami trocha nadvihne. Ešte raz sa nad tým zamyslite… a čítajte ďalej. Celkový obvod hladiny sa teda zmenší o čosi viac ako $2dx$. [13] Výsledok teda je, že na vonkajších stranách pribudne dx povrchu [14] (na každej z nich!) a medzi nimi odbudne „čosi viac ako $2dx$“.

[11] V skutočnosti treba minimalizovať naozaj celkovú energiu sústavy – vody a zápaliek – ich polohové energie v tiažovom poli Zeme plus povrchovú energiu. A z týchto členov je v našej úlohe dominantná povrchová energia.

[12] Aby sme zaplátali tú dieru po posunutí.

[13] Koľko presne, to neviem, ale to ani netreba…

[14] Ak niekomu vadí, že to nesedí rozmerovo, môže si to prenásobiť dĺžkou zápalky. Celé to riešim ako 2D prípad, skutočné 3D má presne rovnakú pointu aj výsledok, len komplikovanejšiu geometriu hladiny… Dlhá tenká zápalka je však dobrým priblížením 2D problému v 3D svete.

Práve to „čosi“ je rozdiel – celková plocha povrchu sa zmenší a energia klesne.[15] Bude to mať za následok ich vzájomné priťahovanie.

Teraz rozoberme druhý prípad, keď jedna zo zápaliek je vo vodeodpudivom vosku. Tvar hladiny medzi zápalkami je teraz také „S“ bez vršku a spodku (polkopček a poldolinka, ale nazvime to S). Ak sa zápalky priblížia k sebe, S sa zdeformuje. Zúži sa o $2dx$, ale zvýši sa sklon, čiže celková zmena dĺžky hladiny medzi zápalkami bude o čosi menšia ako $2dx$. Na vonkajších stranách pribudne dvakrát po dx rovnej hladiny. Celkovo sa teda hladina o čosi zväčší – a zvýši sa energia. Pre sústavu je teda výhodné sa hýbať v opačnom smere – vzdaľovať sa.

Tretí prípad s oboma drevami navoskovanými je rovnaký ako prvý, tvary hladiny sú podobné, len sú vodorovne (doslovne:) prevrátené…

Čiže lúčim sa so slovami „špina k špine sadá, rovný rovného si hľadá“.

2.6 Zahrievanie bŕzd bicykla (opravoval Jano, vzorák Jakub a Jano)

Možno ste už počuli o tom, že pri bežných brzdách, ktoré brzdia trením o ráfik kolesa, sa môže ráfik rozhorúčiť natoľko, že zohreje vzduch v duši tak veľmi, že pretlak dušu roztrhne. Tento jav potom môže mať za následok nepríjemnú nehodu. Preto by sme od vás radi vedeli, pri akej rýchlosti sa na brzdách vytvára najväčší tepelný výkon, keď bez brzdenia by sme si to šinuli dole svahom rýchlosťou $80\,\mathrm{km/h}$. Predpokladaj kvadratickú závislosť odporovej sily vzduchu od rýchlosti.

Keď sa rútim dolu kopcom bez bŕzd, urýchľuje ma časť gravitačnej sily v smere jazdy, označme ju F_t ako tangenciálna (= dotyčnicová, myslené k rýchlosti) zložka. V opačnom smere na mňa pôsobí sila odporu vzduchu F_{odp}. Táto má kvadratickú závislosť od rýchlosti v, zapíšeme $F_{odp} = kv^2$. Podľa zadania pôjdem bez brzdenia maximálnou rýchlosťou $v_0 = 80\,\mathrm{km/h}$. V takom prípade idem rovnomerne, teda pôsobiace sily sú v rovnováhe $F_t = F_{odp} = kv_0^2$.

Keď budem brzdiť silou F_b[16] a moja rýchlosť sa ustáli na rýchlosti v, tak to znamená, že nastala rovnováha síl $F_t = F_{odp} + F_b = kv^2 + F_b$. Odtiaľ vyjadrím

$$F_b = F_{odp} - F_t = kv_0^2 - kv^2\ .$$

[15] Niekto iný by mohol argumentovať, že hladina medzi zápalkami sa pri približovaní zdvíha a preto približovanie zápaliek spôsobuje nárast energie.. Na rozlúsknutie tejto dilemy je treba odhadnúť, ktorý efekt je v tomto prípade dominantný. Poďme na to v priblížení nekonečne dlhej zápalky: povrchové napätie vody je $\sigma = 0{,}073\,\mathrm{N{,}m^{-1}}$, typická hrúbka zápalky je $h \approx 2\,\mathrm{mm}$, hustota vody je $\rho = 1000\,\mathrm{kg{,}m^{-3}}$, tiaž je $g = 10\,\mathrm{m{,}s^{-2}}$. Potom typická energia spojená s nárastom hladiny na jednotku dĺžky zápalky je $\rho Sgh/2$, kde plochu prierezu zdvihnutej kvapaliny S môžeme hrubo odhadnúť ako h^2 – z úvahy, že keď sú zápalky blízko, tak sa hladina zdvihne v ráde h na šírke v ráde h. Táto energia vychádza v ráde 10^{-5} až $10^{-4}\,\mathrm{J/m}$. Môžeme usudzovať, že aj zmeny tejto energie pri približovaní a vzďalovaní zápaliek budú v tomto ráde. Typická energia dodatkového povrchu medzi zápalkami (v dôsledku prehnutia hladiny) je v ráde σh, čo je asi 50-krát viac ako energia v dôsledku zdvihnutia kvapaliny medzi zápalkami. Odôvodnene možno preto dúfať, že aj zmeny energie povrchu budú pri pohybe zápaliek toľkokrát dôležitejšie a teda príspevok k energii od tiaže možno veselo ignorovať. Tým sme zároveň vybavili aj rýpalov, ktorí by sa mohli pýtať, čo ak sa zápalky vplyvom povrchového napätia jemne vtlačia či vypudia z vody – rád energetického príspevku je tam rovnaký ako v prípade vody medzi zápalkami.. zanedbateľný voči energii povrchu.

[16] Ide o súčet brzdných síl na oboch kolesách. Za zmienku stojí, že pri ustálenom brzdení z rovnosti momentov sily bŕzd na ráfiku a sily trenia pneumatiky o cestu vyjde, že tieto sa líšia faktorom blízkym jednotke, totiž pomerom polomeru ráfika a vonkajšieho polomeru pneumatiky.

Energetické – tepelné straty pri brzdení silou F_b na úseku Δs budú $\Delta E = F_b \Delta s$. Tepelný výkon brzdenia je miera energetických strát za jednotku času, $P = \Delta E/\Delta t = F_b \Delta s/\Delta t = F_b v$. Dosadíme za F_b a dostaneme

$$P = k(v_0^2 - v^2)v = kv_0^3(1 - u^2)u \ ,$$

kde sme zaviedli bezrozmernú rýchlosť u (platí $v = uv_0$, čiže u vyjadruje, akým násobkom rýchlosti v_0 je rýchlosť v).

Našou úlohou je nájsť maximum P od v, resp. ekvivalentne P od u. Náš bezrozmerný zápis ukazuje, že sa vlastne snažíme nájsť maximum funkcie $f(u) = (1 - u^2)u$, ktorá nemá žiadne premenlivé parametre! To je skvelé, lebo nám teda napríklad stačí nechať si na počítači vykresliť túto funkciu a graficky odčítať u z intervalu $(0, 1)$, pri ktorom dosahuje funkcia $f(u)$ maximum a sme hotoví![17]

Tí z vás, ktorí vedia derivovať, sa mohli dopracovať k výsledku hľadaním maxima funkcie $f(u)$ na intervale $u \in (0, 1)$ pomocou derivovania. Derivácia funkcie mi hovorí, aký sklon má v danom bode (v danom u) pôvodná funkcia. Ak je funkcia spojitá, tak maximum môže mať iba tam, kde je jej sklon (a teda derivácia) nulový. Z toho plynie praktický návod, ako hľadať maximum funkcie: funkciu zderivujem a deriváciu položím rovnú nule – z tejto rovnice dostanem nejaké korene (= riešenia), kde má pôvodná funkcia nulový sklon. Tieto riešenia nie sú automaticky maximami pôvodnej funkcie – môže ísť rovnako dobre o maximum ako aj o minimum alebo o inflexný bod (na jednu stranu funkcia klesá a na druhú rastie). To, ktorú možnosť som našiel, možno zistiť napríklad vyšetrením znamienka derivácie vpravo a vľavo v tesnej blízkosti koreňa. Maximum sa realizuje vtedy, keď pre u menšie od koreňa je derivácia kladná a pre u väčšie od koreňa je derivácia záporná. V našom prípade máme

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u - u^3) = 1 - 3u^2 = 0 \ ,$$

čo má jediné riešenie v hľadanom intervale, konkrétne $u = 1/\sqrt{3}$, a dá sa ľahko overiť, že to skutočne je maximum.

Výsledkom teda je, že maximálny výkon sa uvoľní pri rýchlosti $v = v_0/\sqrt{3} = 80/\sqrt{3}\mathrm{km/h} \approx 46\mathrm{km/h}$. Poučenie do života znie: pokiaľ nemáš kotúčové brzdy, tak nikdy nebrzdi dolu kopcu tak, že pôjdeš $\frac{1}{\sqrt{3}}$-násobkom rýchlosti bez brzdenia a bez šlapania, lebo vtedy je najväčšie riziko prepálenia ráfiku, resp. roztrhnutia duše kvôli prehriatiu vzduchu vnútri nej.

Derivovanie a metódu hľadania maxima zvládli skoro všetci výborne. Kto sa však nezamyslel nad tým, či dostal naozaj maximum (a záporné riešenie si ani nevšimol), dostal za svoju neobozretnosť postih -1 bod. Tí, čo derivovať nevedeli, sa vynašli inak – použili počítač, obrázky a pod.

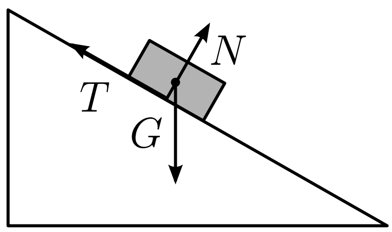
2.7 „Dvakrát puk na naklonenej rovine, prosím.“ (opravoval Bzdušo)

Máme naklonenú rovinu so sklonom α, na ktorej koeficient trenia lineárne narastá z hodnoty 0 (horný koniec), na hodnotu f (dolný koniec). Prevýšenie naklonenej roviny je h. Na jej horný koniec položíme puk a necháme ho skĺznuť.

[17] Na vykreslenie grafu funkcie nájdete na internete viacero nápomocných stránok pod heslom „grapher“, napr. `http://www.mathsisfun.com/data/function-grapher.php`. Keby ste nepoužili bezrozmerný zápis, tak to tiež viete vykresliť na počítači pre danú hodnotu v_0, ale nebolo by evidentné, že riešenie je vždy ten istý násobok v_0.

- Aká bude rýchlosť puku na dolnom konci naklonenej roviny?
- Za aký čas sa puk skĺzne na dolný koniec naklonenej roviny?

Čaká nás veľa práce, takže úvodné reči si tento raz nechajme na záver. Začneme štandardne hľadaním síl a zapísaním pohybovej rovnice. Spýtajme sa: *Aké sily pôsobia na puk?* Túto rozprávku sme už počuli viac ráz, než tie od Dobšinského: Tiažová sila $G = mg$, reakcia od podložky N a trecia sila T. Rozprávku nám na nasledujúcom obrázku ilustruje známa umelkyňa Jana K.[18]



Obr. 3: Sily pôsobiace na puk: Gravitačná sila G, normálová sila podložky N a trecia sila T

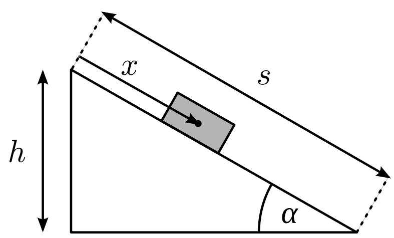
S pomocou obrázka ľahko nájdeme pohybové rovnice

$$\begin{aligned} 0 &= N - G\cos\alpha \\ ma &= G\sin\alpha - T, \end{aligned}$$

z ktorých prvá znamená, že puk sa nepohybuje v smere kolmom na podložku, a druhá opisuje pohyb puku pozdĺž naklonenej roviny. Kým sa púk šmýka, veľkosť trecej sily je $T = fN = fmg\cos\alpha$. Dosadením do rovnice pre zrýchlenie a dostávame

$$a = 1/m(G\sin\alpha - T) = g(\sin\alpha - f\cos\alpha), \tag{1}$$

To znamená, že puk by sa po naklonenej rovine pohyboval s konštantným zrýchlením, keby f bola konštanta. Takú radosť nám však autor tejto úlohy nespravil. Pohyb puku bude *nerovnomerne zrýchlený* a je na nás, ako sa s tým vysporiadame.



Obr. 4: Zavedenie dĺžky naklonenej roviny $s = h/\sin\alpha$ a súradnice x

[18] Aby nezostala v úplnej anonymite, môžete si pozrieť jej osobnú stránku na `http://fks.sk/~janka/`.

Zaveďme si dĺžku $s = h/\sin\alpha$ a súradnicu x podľa predošlého obrázka. Zadanie vraví, že koeficient trenia na naklonenej rovine *lineárne narastá* z nulovej hodnoty na hornom konci, po hodnotu f na dolnom konci. To sa dá zapísať ako

$$f(x) = fx/s = fx\sin\alpha/h,$$

kde (x) zdôrazňje funkčnú závislosť na dráhe x. Rovnicu (1) sugestívne prepíšem do tvaru

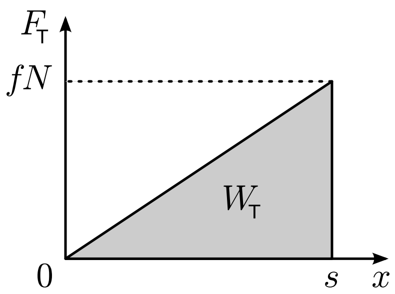
$$\begin{aligned} a(x) &= g(\sin\alpha - f(x)\cos\alpha) \\ &= g\sin\alpha\,(1 - fx\cos\alpha/h)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

kde som závislosť na x zdôraznil aj na ľavej strane.[19] Čo s tým?

Trik prvý: Zázračné grafy. Využijeme zákon zachovania energie. Na začiatku má puk potenciálnu energiu, ktorá sa premieňa na kinetickú a časť sa trením stráca vo forme tepla. Platí

$$mgh = 1/2mv^2 + W_T,$$

kde W_T označuje prácu trecej sily. Vieme, že práca sa počíta ako súčin sily a dráhy, na ktorej táto sila pôsobila. Ak sila závisí od dráhy, tak treba prácu hľadať ako *obsah plochy* pod grafom závislosti $F(x)$ sily od dráhy. Nechajme si poradiť:



Obr. 5: Celkovú prácu trecej sily môžeme určiť ako obsah pod krivkou $F_T(x)$

Obsah plochy ľahko spočítame ako

$$W_T \;=\; 1/2s\,fN = hfmg\cos\alpha/(2\sin\alpha) = mghf/(2\,\mathrm{tg}\,\alpha),$$

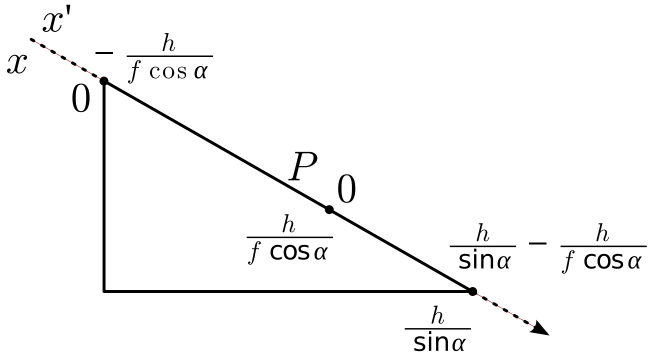
To dosadíme do energetickej bilancie a po troche úprav dostaneme výsledok

$$v = \sqrt{gh\,(2 - f/\,\mathrm{tg}\,\alpha)}.$$

Všimnime si, že puk sa na dolný koniec naklonenej roviny môže dostať iba ak $f \le 2\,\mathrm{tg}\,\alpha$. V opačnom prípade dostávame odmocninu zo záporného čísla, ktorá nie je definovaná. To interpretujeme tak, že za daných okolností problém nemá riešenie, čiže trecie sily puk úplne zastavia ešte pred príchodom na dolný koniec naklonenej roviny.

[19] Nejde o nejakú podstatnú zátvorku. Ide len o moju snahu *naplno precítiť nekonštantné zrýchlenie* v našom probléme.

Trik druhý: Harmonický oscilátor. Treba byť paranoidný a hľadať ho vždy a všade.[20] Nenápadne na nás vykukuje naprieč celou fyzikou.[21] Pointa je takáto: Akonáhle máme silu úmernú dráhe $F \sim -x$ (znamienko mínus je dôležité!), tak sa skúmaný problém dá previesť na harmonický oscilátor – povedzme závažie na pružine – ktorého riešenie je nám známe. Z rovnice (2) vidno, že toto je naozaj náš prípad. Zázrak sa udeje, ak prejdeme k novej súradnici $x' = x - h/(f \cos\alpha)$. To zodpovedá iba posunutiu nuly na x-ovej osi ako ilustruje nasledujúci obrázok.



Obr. 6: Poloha začiatku, konca naklonenej roviny a bodu P, v ktorom na puk pôsobí nulová výsledná sila. Pod čiarou sú zaznačené ich pôvodné súradnice x, nad čiarou sú nové súradnice x'

V posunutej súradnici x' máme

$$a(x') = -gf \sin\alpha \cos\alpha \cdot x'/h = -gf \sin 2\alpha \cdot x'/2h,$$

To znamená, že puk sa bude pohybovať úplne rovnako, ako harmonický oscilátor[22] s rovnovážnou polohou v bode $x' = 0$ (bod P) s uhlovou frekvenciou $\omega = \sqrt{gf/(2h)\sin 2\alpha}$. Určiť čas τ pohybu puku po naklonenej rovine by s nadobudnutými informáciami nemal byť problém. Keďže pohyb začínal z pokoja, možno ho popísať rovnicou

$$x'(t) = x'_m \cos(\omega t),$$

My však vieme, že na začiatku bolo $x = 0$, preto $x'(0) = x'_m = -h/(f \cos\alpha)$.

V čase príchodu puku na spodok naklonenej roviny je $x = h/\sin\alpha$, preto

$$x'(\tau) = h/\sin\alpha - h/(f\cos\alpha) = -h/(f\cos\alpha) \cdot \cos\left(\sqrt{gf/(2h)\sin 2\alpha\tau}\right),$$

[20] Komu sa ako dôkaz tohto tvrdenia bude máliť nasledujúce riešenie, tomu odporúčam pripomenúť si riešenie úlohy **2.7 Pás** z minulého ročníka FKS na `http://www.fks.sk/archiv/2009_10/25vzorakyZima2.pdf` .

[21] Keď sa aj vám na starobu prestanú robiť pupáky, začnú vypadávať vlasy, keď sa na lakťoch začnete škriabkať jednodňovým strniskom a keď vám príde smiešne, že vám v čajovni ponúkajú čaj z variety, tak mi dáte za pravdu v nasledujúcom: Fyzici v skutočnosti okrem nejakých rovnomerných pohybov a harmonického oscilátora nevedia explicitne riešiť takmer nič iné zaujímavé. Keďže málo vecí okolo nás možno považovať za rovnomerný pohyb, snažíme sa na všetko našiť aspoň harmonický oscilátor. S touto nášivkou sa stretneme všade od mechaniky, cez optiku, kvantovú teóriu až po časticovú fyziku.

[22] Úplna pravda znie, že *puk sa bude ako takýto harmonický oscilátor pohybovať až do svojho zastavenia, kedy sa zmení vzťah pre treciu silu.*

Tadá. V rovnici ostala jediná neznáma τ. Po troche algebry dostaneme výsledok

$$\tau = \sqrt{2h/(gf\sin 2\alpha)} \cdot \arccos\left(1 - f/\operatorname{tg}\alpha\right),$$

Opäť si všimnime, že výsledok má zmysel len len pre $f \leq 2\operatorname{tg}\alpha$.[23] V opačnom prípade je funkcia arccos nedefinovaná. To je v súlade so záverom riešenia prvej časti úlohy.

Za zmienku tiež stojí, že tu sa nám ponúka ďalšia cesta aj k nájdeniu rýchlosti v puku na konci naklonenej roviny. Pre časovú závislosť rýchlosti oscilátora platí $v(t) = -\omega x'_m \sin(\omega t)$. Stačí za $t = \tau$, ω a x'_m dosadiť už známe výsledky a cestou využiť, že $\sin(\arccos(\ldots)) = \sqrt{1-(\ldots)^2}$ a budeme tam, kde chceme byť.

Ponaučenie: Po prejdení tohto vzoráku by ste mohli mať pocit, že „fuj, aké špinavé triky". Keď sa vám však pod nohy pripletú už jubilený stý raz, mali by ste svoje pocity prehodnotiť. Kreslenie grafov a hľadanie harmonického oscilátora vás zo šlamastiky vyvedie ešte mnohokrát.

K riešeniam: Teším sa, že táto úloha prilákala toľko prvákov a druhákov. U mnohých som sa však stretol s tým istým nesprávnym riešením, že ste lineárne sa meniace zrýchlenie nahradili jeho priemernou hodnotou a potom ste používali vzťahy pre rovnomerne zrýchlený pohyb. V niektorých prípadoch to viedlo na správne riešenie, inokedy nie. *Tak ako sa veci majú?* Jednou rukou sa pýtame a druhou už berieme pero a papier.

Začnem trochu okľukou, tú však všetci poznáte. Spočítajme dráhu rovnomerne zrýchleného pohybu s danými a, t. Viete, že dráha sa dá spočítať ako obsah plochy pod grafom $v(t)$. Ak onen známy trojuholník nahradíme obdĺžnikom s priemernou výškou $at/2$ (tj. priemernou rýchlosťou), tak pre dráhu dostaneme $s = (at)t/2$, čo je naozaj pravda. Trik s priemernou hodnotou vyšiel, pretože dráha sa naozaj počíta ako obsah plochy po grafom $v(t)$.

Úplne analogická vec platí pre pohyb s lineárne narastajúcim zrýchlením v čase $a(t)$, pokiaľ skúmame rýchlosť. Rýchlosť sa rovná obsahu pod rovnou čiarou $a(t)$ a trik bude fungovať. Keby sme chceli nájsť dráhu prejdenú pri tomto pohybe, tak sa musíme spýtať: *V akom grafe sa obsah pod krivkou rovná dráhe?* V grafe $v(t)$. Pýtame sa ďalej: *Je táto závislosť lineárna?* V našom prípade nie, takže trik fungovať nebude.

Ako posledný príklad si uvedieme príklad z našej úlohy, tj. zrýchlenie lineárne závisle na dráhe. Pointa je, že ak $a(x)$ je lineárne, tak $a(t)$ nie je.[24] Premyslite si to.[25] Preto *nemožno* pre celkovú rýchlosť napísať vzťah $v = t_{\text{pohybu}}(a_{\text{na začiatku}} + a_{\text{na konci}})$, ako to bolo v predošlom odstavci. Na druhej strane závislosť $a(x)$ *je lineárna*, čo sa už využiť dá. Otázka je, ako interpretovať plochu pod grafom $a(x)$. Tu nasleduje séria úvah: Po prenásobení hmotnosťou máme $F(x) = ma(x)$. Obsah pod grafom $F(x)$ je rovný práci. My však vieme, že vykonaná práca sa premení na kinetickú energiu, tj. je rovná $1/2mv^2$.[26] Ak tieto informácie pospájame do kopy,

[23] Pre „kritickú" podmienku $f = 2\operatorname{tg}\alpha$ dostaneme periódu $\tau = \pi/(2\sin\alpha)\sqrt{2h/g}$ – ó, aký to krásny výsledok pre polperiódu oscilátora!

[24] Výnimkou je konštantné zrýchlenie, ktoré bude zrejme rovnako konštantné v závislosti od čohokoľvek.

[25] Dá sa to uvidieť veľa spôsobmi. Matematicky presvedčivý argument je takýto: Skúmajme sklon závislostí $a(x)$ a $a(t)$. Budú to nejaké funkcie „zmenu zrýchlenia podľa dráhy" $A(x) = \Delta a/\Delta x$, ktorá bude konštantná pre lineárnu závislosť $a(x)$ a funkcia je „zmena zrýchlenia podľa času" $B(t) = \Delta a/\Delta t = (\Delta a/\Delta x)\cdot(\Delta x/\Delta t) = A(x)v$. Keďže ide o zrýchlené pohyby, tak v sa mení. Preto ak $A(x)$ je konštantné, tak $B(t)$ nie je, tj. sklon $a(t)$ sa mení a nemôže ísť o lineárnu závislosť.

[26] Presnejšie, táto plocha je rovná $mv^2/2 - mv_0^2/2$, t.j. zmene kinetickej energie.

zistíme, že obsah plochy pod grafom $a(x)$ je rovný $v^2/2$. Skúste sa s podobnými grafmi pohrať aj vy a presvedčte sa, že čas τ sa nám z lineárnych grafov vytĺcť nepodarí. A teraz už kuk očkom na výsledkovku.