Fyzikálny korešpondenčný seminár
26. ročník, 2010/2011
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2010/2011

3.1 Miško sedel vo vlaku a na stole mal položené červené kocky. (opravovala Lenka, vzorák Lenka a Jakub)

Miško sedel vo vlaku a na stole mal položené červené kocky. Zrazu vlak prudko zabrzdil, ktorým smerom sa pohnú kocky? Miško mal však okrem kociek aj balónik plnený heliom, akým smerom sa pohol ten?

Čo vám poviem! Vyskúšajte si to, je to naozaj pôsobivé. Ale v prípade, že ste leniví (fksák a lenivý? neveríííím…), predsa len napíšem aj nejaké teoretické riešenie.[1]

Kým sa vlak pohybuje rovnomerne, kocky na stolíku stoja, takže sa (vzhľadom na koľajnice) pohybujú rýchlosťou vlaku v (v smere pohybu vlaku). Keď vlak zrazu (veľmi prudko) zastaví, kocky si pokojne pokračujú vo svojom pohybe v smere predchádzajúceho pohybu vlaku (vzhľadom na koľajnice) a jediné, čo im prekáža, aby pokračovali naveky vekov v pohybe rýchlosťou v je trenie (od podložky) a odpor prostredia (vzduchu), prípadne až stena Miškovho kupé.

Určite si vieme predstaviť, čo by robila voda v poloplnej fľaške, ktorú by Miško pri prudkom zabrzdení pevne zvieral v ruke. Vydala by sa ďalej v rovnakom smere ako kocky, čo by jej fľaška stačila. Ale čo ten zvyšok? Čo „nevoda“, teda po slovensky: vzduch vo fľaši? Ten by bol, chudák vytlačený ťažkou vodou na opačnú stranu, teda by sa pohol opačným smerom ako kocky.

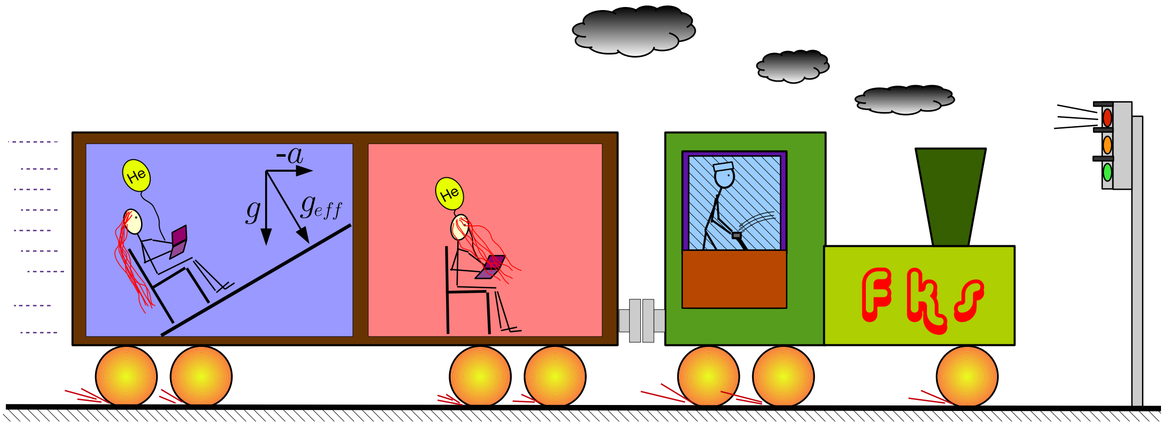
No a prečo sa s vami bavím o fľaške s vodou? Lebo podobne, ako je vzduch vo fľaške „ľahší“ ako voda, aj héliový balónik je „ľahší“ ako vzduch v kupé (keďže predtým v kupé lietal), teda sa po prudkom zabrzdení vlaku pohne *opačným smerom* ako kocky.

K tomu by sa patrilo povedať ešte pár slov: ak máme *rovnomerne brzdiaci vlak* (konštantné spomalenie a smerom dozadu), tak vnútri vlaku (v neinerciálnej vzťažnej sústave) pociťujeme zotrvačné zrýchlenie $-a$ (v smere dopredu) a tiažové zrýchlenie g nadol. Ich vektorovým súčtom dostaneme niečo, čo môžeme chápať ako „efektívne tiažové zrýchlenie“ g_{eff}, to je šikmé nadol a dopredu. Toto „efektívne tiažové zrýchlenie“ určuje v brzdiacom vlaku „efektívne nadol a nahor“. Všetky telesá sa správajú v tomto ponímaní tak ako v bežnom živote, len naše „efektívne smery hore a dole“ sú v brzdiacom vlaku zošikmené. Keby bola v čase brzdenia vo vlaku vhodne šikmá podlaha, tak by sme síce pociťovali trochu väčšiu tiaž, ale nehádzalo by nás čudne dopredu, či dozadu, a balónik by bol pekne nad našimi hlavami, vlasy by nám nepadali do knižky a nás by nehádzalo dolu zo stoličky.[2]

[1] Pisateľka vzoráku sa touto implikáciou a súčasným napísaním vzoráku vôbec nevyjadrila, čo si o lenivosti riešitelov vlastne myslí. Pozn. korektora.

[2] Všimnite si, že naše tvrdenia vychádzajú z *rovnomerného brzdenia* a ustáleného stavu. Netýkajú sa okamihu, keď práve vlak začal brzdiť, to prenecháme experimentátorom na preskúmanie.

Seminár podporujú:



Obr. 1: Vo vláčiku

3.2 Jeden pomaranč sa zaľúbil raz (opravovala Tinka)

Sme na vysokom strome, na ktorom nerastú tri citróny, ale štyri pomaranče. Visia do tvaru štvorca, ale postaveného na vrchole. Zrazu sa nablízku zjaví mandarinka a všetky pomaranče naraz bezhlavo zoskočia zo stromu, horný smerom kolmo hore, dolný kolmo dole, pravý vodorovne doprava a ľavý vodorovne doľava. Aký útvar budú tvoriť v neskoršom čase pádu?

Zamyslime sa nad tým, čo ovplyvňuje pohyb pomaranča. Tým, že sa bezhlavo vrhol, si udelil nejakú počiatočnú rýchlosť v danom smere. Keby nebolo žiadnych síl, pomaranč by sa donekonečna pohyboval rovnomerne a priamočiaro touto rýchlosťou. Lenže do hry nám jedna sila vstupuje – tiažová. Tá ho urýchľuje tiažovným zrýchlením a teda sa časom mení jeho vertikálna zložka rýchlosti.

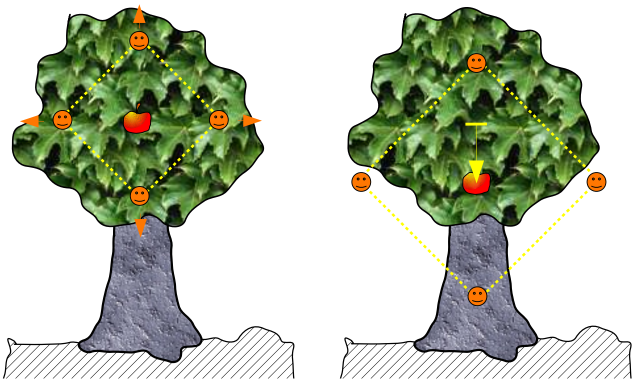
Všeobecné riešenie, ktorým nikdy nič nepokazíme, je, že si popíšeme polohu pomarančov v čase t. Prirodzene sa nám ponúka súradnicová sústava hore-dole (y), vľavo-vpravo (x). A nech je kladná rýchlosť pohybu doprava a dole a pôvodné súradnice (x_{0_q}, x_{0_q}) kde q je ľ(avý), p(ravý), h(orný) alebo d(olný). Rozoberme si situáciu napríklad pre ľavý pomaranč. On sa vrhol nejakou rýchlosťou v doľava. Jeho x-ovú súradnicu nič iné neovplyvňuje, preto $x_{\text{ľ}}(t) = x_{0_{\text{ľ}}} - vt$, naopak v smere y-ovej padá voľným pádom a teda $y_{\text{ľ}}(t) = 1/2gt^2$. Pre horný je to naoko komplikovanejšie, síce zjavne $x_{\text{h}}(t) = x_{0_{\text{h}}}$, ale čo s $y(t)$? Keďže tiažové zrýchlenie v našom prípade nezávisí od polohy (máme homogénnu tiaž), tak môžeme tie pohyby popočítať osobitne a nakoniec efekty oboch sčítať. A to nám dá $y_{\text{h}} = y_{0_{\text{h}}} - vt + 1/2gt^2$. Analogicky ostatné prípady. Keď si to človek napíše pekne pod seba pre všetky pomaranče, tak si zaručene uvedomí, že nám tam *všade* v y-ovej súradnici vystupuje člen $1/2gt^2$. Hýbe všetkými rovnako.

A pohybovať všetkými naraz znamená nulový relatívny pohyb medzi pomarančami navzájom. Je to podobné ako keď sa veziete vo vlaku. Nech vlak ide akokoľvek, ak vás zaujímajú iba vzájomné (=relatívne) polohy medzi vami[3], tak si môžete pohyb vlaku odmyslieť. Toto je presne náš prípad – zaujíma nás vzájomná poloha pomarančov a nie kde presne je táto formácia.

Iný pohľad na vec je cez zmenu vzťažnej sústavy. Zoberme takú, ktorá padá zároveň s pomarančmi – nech je to sústava jablčka, ktoré bolo pôvodne na strome v strede štvorca z pomarančov, a ktoré odpadlo v dôsledku otrasov stromu práve v momente, keď pomaranče bezhlavo

[3] Aaaa, ON(A) sa ku mne približuje! Vtedy je asi fakt, že zvonka to vyzerá tak, že obaja idete cca 100km/h smerom do Košíc nanajvýš nezaujímavý ;)

skočili kvôli mandarinke.[4] V sústave jabĺčka sa nám bude pohyb pomarančov javiť ako jednoduchý rovnomerný priamočiary pohyb. Takže v čase t to vyzerá ako na obrázku vpravo a intuícia s trošičkou geometrie povedia, že formácia zostane štvorcom.



Obr. 2: Pomaranče v pohybe

Morálne poučenie? Nie vždy je ten náš prirodzený pohľad na veci najjednoduchší a občas sa zíde zmeniť vzťažnú sústavu. Fyzika je ako život.

3.3 Vysielač na veži (opravoval Mišo, vzorák Mišo a Jakub)

Nemenovaný mobilný operátor sa rozhodol poskytnúť pahorkovitému kraju detvianskemu dobrý mobilný príjem. Chce preto umiestniť svoj vysielač (BTS-ku) o hmotnosti m na stožiar vysoký H. Stožiar bude pozostávať z N rozdielne mohutných tehlových poschodí, každé s rovnakou výškou $h = H/N$. Stožiar má byť (ekologicky) vyrobený z nepálených tehál s pevnosťou v tlaku σ a s hustotou ρ. Aby stožiaru nehrozilo spadnutie, má spĺňať podmienku, že zaťaženie tehál v žiadnej výške nepresiahne jednu pätinu ich pevnosti. Určte hmotnosť tehál potrebných na stavbu!

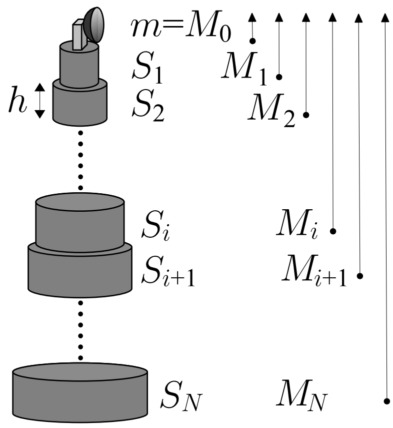
Podľa popisu v zadaní si predstavme ako asi bude vyzerať stožiar. N poschodí o rovnakej výške $h = H/N$, rôznej mohutnosti. Čiže stupňovitá pyramída. Keďže chceme zistiť hmotnosť tehál potrebných na stavbu, čo nie je nič iné ako hmotnosť pyramídy, potrebujeme zistiť silové pôsobenia vo vnútri celej štruktúry. Na každé poschodie pôsobia určitým tlakom všetky poschodia nad ním, pričom pre zjednodušenie budeme uvažovať rovnomerné rozloženie pôsobenia na celú styčnú plochu. Ak chceme mať splnenú podmienku o maximálnom zaťažení[5], tak musí platiť

$$gM_i = q\sigma S_i \,,$$

kde $q = 1/5$ je náš „koeficient bezpečnosti“ určujúci, že tlak v tehlách nesmie prekročiť určitú časť (=pätinu) tlaku, kedy sa materiál začne deštruovať; M_i je hmotnosť časti stožiara od jej vrchu (vrátane vysielača úplne hore) až po i-te poschodie (vrátane neho).

[4] Čo robilo jabĺčko na pomarančovníku, to sa v žiadnej literatúre nepíše.

[5] Je ľahké rozmyslieť si, že ak v hociktorom poschodí nevyužijeme maximálne prípustné (pätinové) zaťaženie, tak to stavbu predraží.



Obr. 3: Náš stožiar

Čiže si viem vyjadriť aj plochu S_i tohoto poschodia cez podmienku na tlak v spodnej časti prierezu i-teho poschodia, $S_i = gM_i/(q\sigma)$. Pod týmto i-tym poschodím sa bude nachádzať ďalšie, $(i+1)$-vé. Pre hmotnosť časti stožiara od hora až po toto ďalšie poschodie vrátane bude platiť,

$$M_{i+1} = M_i + hS_{i+1}\rho\,.$$

Čo je super, lebo za S_{i+1} viem dosadiť výraz z predošlej rovnice, kde namiesto indexu i zoberiem $i+1$,

$$M_{i+1} = M_i + h\frac{gM_{i+1}}{\sigma q}\rho\,,$$
$$M_{i+1} = M_i\,\frac{q\sigma}{q\sigma - h\rho g}\,.$$

Odtiaľ vidím podmienku, kedy vlastne má úloha riešenie: len vtedy, ak $q\sigma > h\rho g$, čiže vtedy, keď sú tehly schopné udržať výšku h samých seba neprekročiac prípustnú hodnotu tlaku $q\sigma$. Ďalej vidím, že hmotnosť pyramídy od hora po i-te poschodie rastie geometricky, platí

$$M_N = M_0\left(\frac{q\sigma}{q\sigma - h\rho q}\right)^N\,,$$

čo je hmotnosť celého stožiara (či pyramídy) aj s vysielačom hore (ktorého hmotnosť je $M_0 = m$). Hmotnosť tehál je potom jednoducho,

$$M_{\text{tehly}} = M_N - M_0 = m\left[\left(\frac{q\sigma}{q\sigma - h\rho q}\right)^N - 1\right]\,.$$

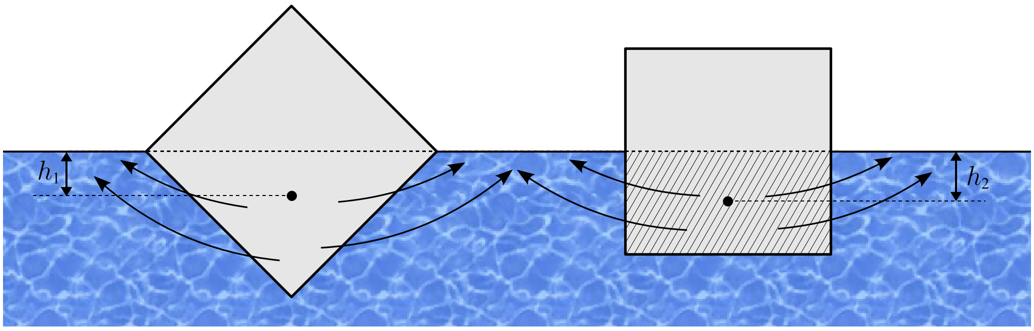
Keď si chceme urobiť aj nejaký číselný odhad, tak môžeme použiť tieto dáta: hustota nepálenej tehly $\rho \approx 1800\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, pevnosť v tlaku $\sigma \approx 5\,\mathrm{MPa}$, výška BTS-ky $H = 40\,\mathrm{m}$, počet poschodí $N = 200$. Potom nám vyjde, že hmotnosť tehál potrebných na stavbu je približne 1,06-násobok hmotnosti vysielača. Pre porovnanie, homogénny stožiar (t.j. taký, ktorý pozostáva akokeby z jediného poschodia; s konštantným prierezom) by musel mať 2,57-násobok m.

3.4 Ja sa asi pretočím... (opravoval Maťo Ch., vzorák Bzdušo)

Na pokojnej hladine si spokojne plávajú dva dlhé drevené hranoly so štvorcovou podstavou. Jeden z nich pláva s hornou stranou vodorovne, druhý pláva natočený o $45°$, teda vodorovne je jedna z jeho uhlopriečok. Sú tieto polohy stabilné? Hustota vody je dvojnásobná oproti hustote dreva.

Autor tejto úlohy nám zadal príjemné parametre. Po prvé, hranol má hustotu rovnú polovici hustoty vody, takže je ponorený polovicou svojho objemu. Po druhé, hranol má štvorcovú podstavu. Všimnime si, že každá priamka prechádzajúca ťažiskom štvorca, rozdeľuje štvorec na dve rovnako veľké časti. To spolu s prvou informáciou znamená, že nech hranol akokoľvek otočíme okolo jeho osi, ťažisko sa bude vždy nachádzať na úrovni vodnej hladiny.[6] Avšak pokiaľ je ťažisko hranola stále rovnako vysoko, jeho potenciálna energia nezávisí od natočenia. Prečo by malo byť nejaké natočenie stabilné a iné nie? Zvláštne...

Ešte zvláštnejšie však je, že hranol nepadne na dno rybníka. Veď tam bude mať energiu ešte menšiu! Prečo to vlastne ten hranol pláva na hladine? *Jasnééé! Veď hranol svojou prítomnosťou vytláča vodu.* Podľa Archimedovho zákona vytlačí ľubovoľne natočený hranol vždy rovnako veľké množstvo vody, avšak z rôznych hĺbok. Od natočenia teda závisí *energia vody.*



Obr. 4: Hranol vytlačí v oboch situáciach (rovnaké) množstvo vody rovné svojej tiaži mg. V závislosti od natočenia však vytláča vodu z rôznych hĺbok, čím ovplyvňuje jej potenciálnu energiu.

Celkom všeobecne môžeme porovnať polohovú energiu *sústavy voda+hranol* v tiažovom poli v oboch prípadoch. Celkovú polohovú energiu získame súčtom polohovej energie vody a hranola. Hranol má tažisko v oboch prípadoch rovnako vysoko, to už vieme, takže ten si pri porovnaní nezahrá. Energiu vody môžem rozbiť na 2 členy: energiu vody E_0, keby vypĺňala všetko pod hladinou (teda aj miesto, kde je nanominovaný hranol), od ktorej musím odpočítať energiu vody, ktorú som tam pridal a v skutočnosti tam nie je (tá okupujúca miesto v hranole). Ľahko nahliadneme, že energie v oboch prípadoch sa líšia akurát o ten posledný člen, čiže o záporne vzatú energiu vytlačenej vody.[7] Takže v situácii naľavo je energia vody

$$E_1 = E_{\text{hranol}} + E_0 - mgh_1 = E_{\text{hranol}} + E_0 + mga/4 \,,$$

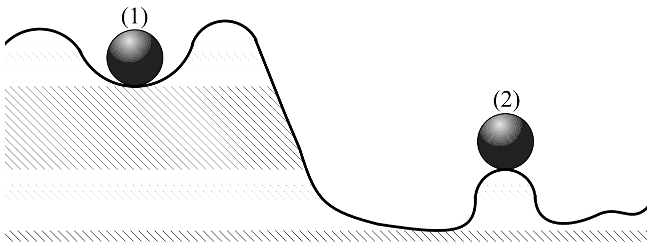
[6] To je naozaj veľmi špeciálny prípad. Vyskúšajte si, že pre podstavu tvaru rovnostranného trojuholníka by to takto pekne nefunguje. To preto, lebo jeho ťažisko nemá *tú* vlastnosť, že každá priamka ním prechádzajúca ho rozdelí na dve rovnako veľké časti.

[7] Čím vyššie má ťažisko, tým menšiu celkovú energiu má náš systém. Alebo ešte inak, čím vyššie má ťažisko, tým nižšie má ťažisko skutočné vodné teleso a tým má nižšiu energiu celý systém.

kde výška ťažiska vytlačenej vody je $h_1 = -a/4$, a v situácii napravo

$$E_2 = E_{\mathrm{hranol}} + E_0 - mgh_2 = E_{\mathrm{hranol}} + E_0 + mga\sqrt{2}/6\,.$$

Dosadíme do kalkulačky a vidíme, že $E_1 > E_2$. Naradostení by sme mohli zbrklo vydedukovať, že stabilná je situácia s menšou energiou, t.j. s vodorovnou uhlopriečkou. Veď zo skúsenosti vieme, že fyzikálne zákony ženú veci okolo nás vždy do stavu s najnižšou energiou. To je zaiste potešujúca úvaha, ktorá si v tomto prípade zaslúži polovicu bodov, ale vo všeobecnosti *nie je pravdivá*! Kontrapríklad je uvedený na nasledujúcom obrázku.



Obr. 5: Poloha (1) je stabilná a poloha (2) je labilná, hoci pre energie guliek platí $E_1 > E_2$. Očividne teda neplatí tvrdenie, že stabilná poloha je stav s najnižšou energiou. Na vznik stabilnej polohy stačí akákoľvek malá jamka.

Keď rozumieme, prečo je vyššie uvedený postup zlý, bolo by odo mňa slušné ukázať nejaký lepší. Mám hneď tri:

(i) Doplním predošlé riešenie o dôkaz, že hranol nemôže zaujať *žiadnu inú rovnovážnu polohu*, než tie uvedené v zadaní. Tomuto sa vo vzoráku nebudem venovať, ale ďalej by dôkaz spočíval na nasledovných tvrdeniach (o ktorých platnosti by ste sa mohli skúsiť individuálne presvedčiť):

- Ak má systém len dve rovnovážne polohy, potom jedna z nich je nutne stabilná a druhá labilná.
- Ak má nájdená labilná poloha menšiu energiu ako nájdená stabilná poloha, potom sa medzi nimi musí nachádzať ešte aspoň jedna stabilná poloha s ešte menšou energiou.

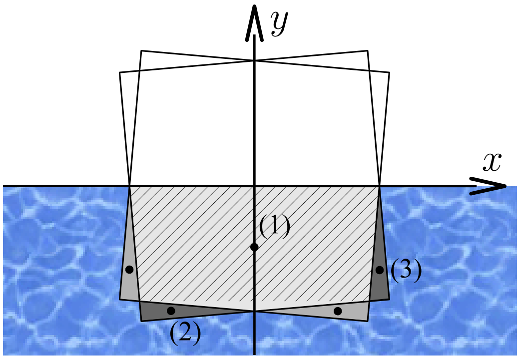
(ii) Zistím, ako sa zmení energia sústavy pri malých natočeniach. Ak rastie, poloha je stabilná. Ak klesá, poloha je labilná.

(iii) Pozriem sa, ako sa zmenia momenty síl pôsobiace na hranol pri malom vychýlení. Touto treťou cestou sa vyberieme my.

Na hranol pôsobia dve sily: tiažová sila, ktorej pôsobiskom je ťažisko a vztlaková sila, ktorej pôsobiskom je ťažisko ponorenej časti hranola.[8] Zdá sa, že bude treba hľadať ťažisko ponorenej

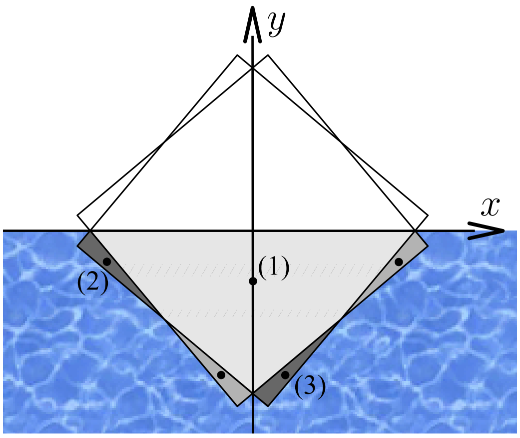
[8] Že prečo? Ľaľa dôkaz: Vztlaková sila vzniká ako súčet tlakových síl pôsobiacich na skúmané teleso cez jeho povrch. Predstavme si, že by sme celé skúmané teleso nahradili vodou – ale myšlienkovo si toto kvapalné teleso ponechali vydelené od zvyšku kvapaliny. Potom vztlaková sila pôsobiaca na toto vydelené kvapalné teleso je rovnaká ako keď tam bolo pôvodné teleso, lebo povrch ostal ten istý. To, čo sme však vytvorili je „voda vo vode“, t.j. systém, o ktorom vieme, že je stabilný (spontánne sa nezrýchľuje a neroztáča). To znamená, že vztlaková sila sa čo do veľkosti rovná tiaži vytlačenej vody a pôsobisko vztlakovej sily leží na zvislej priamke prechádzajúcej ťažiskom vytlačenej vody. Výber konkrétneho bodu na tejto priamke je ľubovoľný, fyzikálne nerozlíšiteľný.

časti hranola. V skutočnosti nám však stačí omnoho menej – zistiť, na ktorej strane ťažiska hranola sa nachádza pri malom vychýlení.



Obr. 6: Skúmanie stability polohy hranola s niektorou stranou vodorovnou. Obrázok naznačuje hľadanie polohy ponorenej časti hranola diskutované v nasledujúcom odstavci. Sivo naznačený štvorec naznačuje polohu hranola vychýlený o rovnaký uhol do opačnej strany.

Pozrime sa najprv na situáciu s niektorou stranou vodorovnou. Nakloňme hranol o malý uhol napr. proti smeru hodinových ručičiek. Ponorenú časť sme si rozdelili na veľkú päťuholníkovú symetrickú časť (1), ktorej ťažisko sa zrejme nachádza pod ťažiskom hranola, a na dve rovnako veľké trojuholníkové časti (2) a (3). Všimnime si, že ťažisko časti (3) má väčšiu vodorovnú vzdialenosť od stredu hranola, než ťažisko časti (2). To znamená, že ťažisko ponorenej časti sa nachádza máličko vpravo od ťažiska hranola. Momenty síl preto stáčajú hranol proti smeru hodinových ručičiek, preč od rovnovážnej polohy. Ide teda o polohu labilnú.



Obr. 7: Skúmanie stability polohy hranola s jednou uhlopriečkou vodorovnou. Obrázok naznačuje hľadanie polohy ponorenej časti hranola diskutované v nasledujúcom odstavci. Sivo naznačený štvorec naznačuje polohu hranola vychýlený o rovnaký uhol do opačnej strany.

Teraz druhá poloha. Nakloňme hranol opäť o malý uhol proti smeru hodinových ručičiek. Ponorenú časť sme si opäť rozdelili na veľkú symetrickú časť (1) s ťažiskom presne pod ťažiskom hranola, a na dve rovnako veľké časti (2) a (3). V tomto prípade má očividne ťažisko časti (3) menšiu veľkosť súradnice x než časť (2). Ťažisko ponorenj časti sa preto nachádza vľavo od ťažiska hranola. Výsledný moment síl stáča hranol proti vychýleniu, ide teda o polohu stabilnú.

Záujemcom odporúčam po krátkom predjedle zahryznúť sa do naozajstného dezertu.[9]

3.5 Most z CDciek (opravoval Tomáš)

V čase nových technológií sa mi nahromadilo množstvo starých nepotrebných CD-čiek. Čo s nimi? Postavím si most. Uložím ich všetky na seba na jednu kopu a potom ich začnem vykláňať tak, aby táto kopa nespadla. Akú najväčšiu vzdialenosť dokážem preklenúť mojím (pol)mostom?

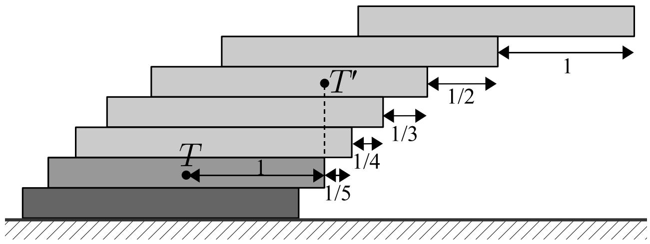
Ahoj vospolok. Aj keď domotať sa tu dalo mohutne, po fyzikálnej stránke bola toto ľahká úloha. Skutočne, všetko čo potrebujeme bude dokolečka točiť jednu jedinú úvahu: Ak má veža z n CD-čiek stáť, musí pre každé $k < n$ platiť, že ťažisko horných k CD-čiek sa nachádza nad $(k + 1)$-vým CD-čkom (a nie napríklad kúsok vedľa). Rozmyslite si, že táto podmienka je pre stabilitu veže nielen nutná, ale aj postačujúca – inými slovami, ak túto podmienku splníme (pre každé $k < n$) tak veža určite obstojí – však prečo by aj nemala? Táto podmienka bude alfou aj omegou všetkých našich úvah. Ďalej, aby sme si rozumeli, dohodnime si pár konvencí: Most budeme stavať zľava doprava. Polomer CD položíme rovný 1 a jeho hmotnosť m. Situáciu si predstavím pri pohlade z boku – CD-čka teda v podstate vyzerajú ako paličky o dĺžke 2. Keďže si CD predstavujem ako paličku, môžem sa baviť o jej pravom a ľavom okraji, čo využijeme neskôr. Ak dve CD ležia na sebe, vrchné môže byť oproti spodnému trochu posunuté (pre náš most to bude spravidla posun doprava). Budeme tiež hovoriť, že vrchné CD o čosi pretŕča. Celková dĺžka mostu je potom vlastne súčet prietrčov všetkých CD nad svojimi spodnými susedmi. Na záver úvodu – čo to presne znamená, že ťažisko vrchných k CD-čok leží nad $(k+1)$-vým? Ráta sa, aj keď ťažisko vrchných k CD leží presne nad okrajom $(k + 1)$-vého CD? Ťažko povedať. Takáto situácia bude totiž rovnovážna, aj keď nie stabilná. Ak chceme most stabilný musíme ťažisko vrchných k CD posunúť od okraja $(k + 1)$- vého „dovnútra“, aspoň o ľubovoľne malé, avšak kladné čosi. Z toho, čo sme povedali vyplýva, že táto daň za stabilitu môže byť dosť malá a tak ju pre jednoduchosť budeme zanedbávať.

Začnime nejakým spôsobom konštruovať náš most. Položme na zem jedno CD-čko a druhé naň tak, aby pretŕčalo najviac ako sa len dá – teda presne 1 (polomer CD-čka). Teraz na túto sústavu položme tretie CD. Aby držalo, nesmie pretŕčať o viac než 1 ponad druhé CD. Čo však ak sa pozrieme na vrchnú dvojicu CD? Zistíme, že je to celé zle. Pokiaľ tretie CD bude prečnievať ponad druhé o hocijakú nenulovú dĺžku, sústava vrchných dvoch CD už nebude mať ťažisko nad prvým! Takto sa veru ďaleko nedostaneme – tretie, štvrté a vlastne všetky ďalšie CD musíme klásť presne nad druhé. Ako most to nie je teda nič moc. Vzniká teda otázka, či bol dobrý nápad nútiť druhé CD prečnievať najviac ako sa len dá a či by v tomto prípade menej nebolo viac.

Namiesto toho, aby sme špekulovali, ako modifikovať predchádzajúcu stavebnú metódu, spravme to celé inak – skúsme budovať náš most z opačného konca. Keď teraz budem hovoriť o prvom, druhom,... CD, myslím tým prvé, druhé,... CD od vrchu. Stále budeme postupovať maximálne „pažravo“ – teda, ak vyrátame, že k-te CD môže nad $(k+1)$-vým pretŕčať maximálne o x, tak tento maximálny možný prietrč pri stavbe naozaj využijeme. Poďme teda na to: Prvé CD môže nad druhým pretŕčať maximálne o 1. Umiestnime ho teda tak a poďme ďalej. Sústava

[9] Úloha FX1 Kornútok v momentálne aktuálnej sade úloh totej skvelej súťaže.

prvých dvoch CD má ťažisko vo vzdialenosti 1/2 od pravého okraja druhého CD a teda druhé CD môže nad tretím pretŕčať maximálne o 1/2. Úplne analogicky zisťujeme, že tretie nad štvrtým pretŕča maximálne o 1/3. To začína vyzerať podozrivo, nie? Skúsme tieto výsledky trochu zovšeobecniť. Horných k CD má hmotnosť km a ich ťažisko T' sme umiestnili (v zmysle pažravosti) presne nad pravý okraj $(k+1)$-vého CD. Ťažisko T $(k+1)$-vého CD je od jeho pravého okraju vzdialené 1.



Obr. 8: Situácia pre $k = 5$

Výsledné ťažisko celej sústavy $(k+1)$ CD-čiek je teda vo vzdialenosti

$$\frac{0 \cdot km + 1 \cdot m}{km + m} = \frac{1}{k+1}$$

vľavo od pravého okraja $(k+1)$-vého CD a presne o toľko teda môže (a aj bude) $(k+1)$-vé CD pretŕčať nad $(k+2)$-hým. Prietrč k-teho CD nad $(k+1)$-vým CD je teda $1/k$.

Neostáva nám iné, než sa zamyslieť, koľko je

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\,.$$

Kto si hodí do wikipedie „harmonic series“, hneď vidí, že tento súčet sa dá odhadnúť ako $\gamma + \ln(n)$ (kde $\gamma \approx 0{,}58$) a so vzrastajúcim n rastie do nekonečna. Tento odhad samozrejme nie je presný, no ako odpoveď na otázku zo zadania postačí. Ešte hrubší, ale stále postačujúci dôkaz nekonečnosti tejto sumy vyzerá takto,

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}} + \ldots\,,$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}\,.$$

Odtiaľ vidíme, že akúkoľvek dĺžku mosta L viem zaručene preklenúť konečným počtom N CD, pričom vieme s určitosťou povedať $N \leq 4^{L-1}$.

Na záver si ešte treba vyjasniť jednu vec – nevieme nejakou inou stavebnou stratégiou byť ešte viac úspešnejší a dlhomostovejší? Odpoveď je, že nie – ak maximálny vyrátaný prietrč medzi k-tym a $(k+1)$-vým CD nevyužijem naplno, jediné čo získam je možnosť spraviť prietrč medzi $(k+1)$-vým a $(k+2)$-hým CD väčší, no jednoduchý výpočet ukáže, že týmto biznisom viac stratím ako získam. Mimochodom, načo je nám „most“, ktorý evidentne neunesie žiadne zaťaženie?! To je možné snáď iba vo FKS...

3.6 Roztop sa! (opravoval Poli, vzorák Poli a Jakub)

Po naklonenej rovine sa šúcha ľadový hranolček. Akú dĺžku musí prešúchať, aby sa z neho roztopila polovica? Koeficient trenia je f, sklon je α, teplota vzduchu 0℃, merné skupenské teplo topenia je l.

Čo sa to tam vlastne deje? Kvádrik ľadu sa bude roztápať vďaka teplu, ktoré vyprodukuje trením o podložku. Iný efekt k jeho topeniu prispievať nebude, keďže v zadaní je uvedené, že teplota okolia je 0℃; čo znamená, že tepelná výmena s vonkajším prostredím nebude prebiehať. Tepelnú výmenu s už roztopenou vodou môžem pokojne odignorovať laxnou poznámkou, že tá si predsa „potečie svojou cestou“. Taktiež budeme tupo predpokladať, že všetko teplo vyrobené trením ľadu o podložku sa upotrebí na roztápanie ľadu, čo tiež nie je celkom pravda, keďže vo všeobecnosti ostane podložka po prechode ľadu po nej teplejšia ako bola. Tak za týchto trápnych predpokladov sa ideme trápiť ďalej.

Už snáď 100-krát ste počuli, že nemáte jesť žltý sneh, a dozaista asi rovnaký početkrát ste počítali, že veľkosť normálovej (prítlačnej) sily F_N na naklonenej rovine s uhlom náklonu α je $mg\cos\alpha$. Odtiaľ už ľahko uvidíme, že pre treciu silu platí

$$F_\mathrm{t} = F_\mathrm{N} f = mgf\cos\alpha\,.$$

Tu sa však črtá prvý problém. Čo je to, to m? Je to hodnota hmotnosti na začiatku, v strede, alebo nebodaj na konci procesu? Keďže z ľadu ubúda, závisí od času, kedy sa na proces pozrieme – hmotnosť kvádrika sa v priebehu jeho šmýkania bude meniť. To je vlastne jediný problém, ktorý budeme v ďalších riadkoch vzoráku riešiť.

Množstvo tepla vytvoreného trecou silou nie je ťažké určiť, je to práca $W = F_\mathrm{t}s$. Ako sme však už spomínali vyššie, hmotnosť kvádrika sa bude meniť a tým sa bude meniť aj normálová sila a tým aj trecia. Finálne sa teda bude meniť aj množstvo tepla vyprodukovaného trecou silou na jednotke dĺžky. Klučka, ktorou vybŕdneme z tejto slepej uličky, je rozdeliť proces na veľmi krátke časové okamihy (alebo vzdialenostné úseky), počas ktorých sa hmotnosť ľadu *prakticky nebude meniť*. Označme si množstvo tepla spotrebovaného na roztápanie ΔQ, hmotnosť roztopého ľadu Δm na dráhe Δs a prácu vyprodukovanú trecou silou ΔW. Potom platí rovnosť,

$$l\Delta m = \Delta Q = \Delta W = mgf\cos\alpha\,\Delta s\,.$$

A čo s tým teraz? Existuje niekoľko ciest, ktorými sa dá vydať. Každá vedie k cieľu. Dá sa prejsť od malých veličín k nekonečne malým veličinám, čím dostaneme diferenciálnu rovnicu – to necháme fajnšmekrom a vysokoškolákom. Tiež sa na to dá našiť numerika a šupnúť to napríklad excelu. My pôjdeme zlatou strednou cestou a pokúsime sa to vyriešiť viac-menej exaktne, pritom bez pomoci vysokej matematiky. Výraz upravíme tak, aby naša neznáma Δs vystupovala na jednej strane rovnice,

$$\Delta s = \frac{\Delta m}{m}\frac{l}{gf\cos\alpha}\,.$$

Teraz si označme $\Delta m/m = p$. Teda skúmame veľkosť úseku Δs, na ktorom hmotnosť ľadu klesne na $(1-p)m$. Zároveň tým máme pod kontrolou aj pomer hmotností, ktorý už považujeme za dosť malý na to, aby sme vyhlásili, že hmotnosť sa na tomto úseku *prakticky nemení.*[10]

Chceme aby výsledná hmotnosť bola oproti pôvodnej polovičná. Na to sa daný proces (odtopenie p-násobku hmotnosti ľadu) na úseku dĺžky Δs musí niekoľkokrát (N) zopakovať, konkrétne platí

$$(1-p)^N = 0{,}5\,,$$

čo logaritmovaním (zvolili sme si pri základe $e = 2{,}71828183\ldots$, takýto logaritmus sa nazýva prirodzený) prejde na rovnicu

$$N\ln(1-p) = \ln 0{,}5 = -\ln 2\,.$$

Výsledná dráha teda bude

$$s = N\Delta s = \frac{p}{-\ln(1-p)}\frac{l\ln 2}{gf\cos\alpha}\,.$$

Zatiaľ náš výsledok, zdá sa, závisí od konkrétneho pomeru p. Zdravý výsledok by nemal závisieť od tohoto nami umelo zavedeného parametra p. Treba však povedať, že náš postup je rozumný iba za predpokladu, že p je dostatočne malé (čo má za následok dostatočne konštantnú hmotnosť na každom z úsekov Δs). Treba sa teda pozrieť na to, ako sa správa podiel $-p/\ln(1-p)$ pre veľmi malé hodnoty p.[11] Môžem napr. použiť kalkulačku a dosádzať za p postupne jednu tisícinu, jednu milióntinu, jednu miliardtinu atď. Takto človek veľmi rýchlo nadobudne pocit, že tento podiel bude asi rovný jednotke.

Môžem sa na to pozrieť aj rigoróznejšie ako len kalkulatívne. Čitateľ je lineárna funkcia, tam nemáme čo dodať. Čo však s menovateľom? Vieme hodnotu menovateľa pre $p = 0$, lebo $\ln 1 = 0$. Chceme vedieť akú hodnotu má (prirodzený) logaritmus v bode *tesne vedľa* jedničky. Pomôže takéto matematické tvrdenie: každá spojite diferencovateľná funkcia (t.j. taká, ktorej prvá derivácia je spojitá) je v bezprostrednom okolí vybraného bodu dobre aproximovateľná lineárnou funkciou. To si možno predstaviť tak, že aj keď je graf funkcie akokoľvek krivoľaký, tak keď si ho dostatočne priblížim v okolí skúmaného bodu, tak uvidím rovnú čiaru. Fajn, využijúc toto tvrdenie, treba nám nejako vypočítať sklon tej priamky v okolí $p = 0$, ktorou chcem funkciu $\ln(1-p)$ v blízkom okolí bodu $p = 0$ aproximovať. Ten sklon sa dá zistiť pohľadom na graf, alebo derivovaním[12] $(\ln x)' = 1/x$ a dosadením $x = 1$, keďže chceme vedieť sklon v bode $p = 0$. Dostávame aproximáciu,

$$\ln(1-p) \approx \ln 1 - p\frac{1}{1} = -p\,,$$

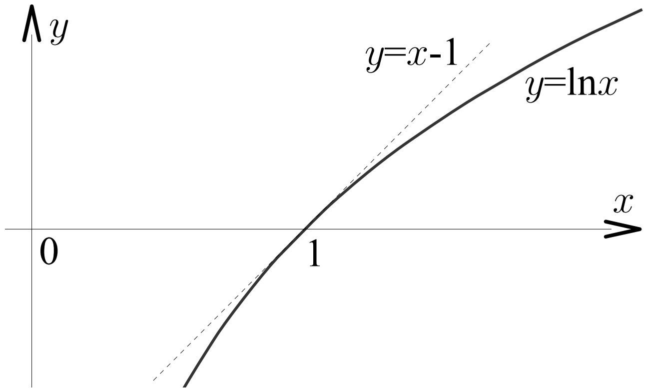
[10]Napríklad pre pomer $p = 0{,}001$ sa hmotnosť na celkom úseku Δs zmení iba o promile. To je pre väčšinu praktických otázok naozaj dosť málo na to, aby sme mohli vyhlásiť, že hmotnosť sa na takomto úseku už prakticky nemení.

[11]Evidentne nemôžem jednoducho spočítať tento podiel pre limitný prípad, $p = 0$, lebo vtedy dostávam neurčitý výraz $0/0$.

[12]Z výsledku derivovania, $1/x$ okamžite vidím, že funkcia $\ln x$ je spojite diferencovateľná v blízkom okolí bodu $x = 0$.

čo instantne vieme použiť vo výraze $-p/\ln(1-p)$ pri vyhodnocovaní jeho hodnoty v limite $p \to 0$. Dostaneme hodnotu 1 (ako nám napovedala aj kalkulačka) a vypočítali sme tak možno prvú netriviálnu limitu v živote. Po dosadení dostávame pre dráhu vzťah,

$$s = \frac{l\ln 2}{gf\cos\alpha}\,.$$



Obr. 9: Aproximácia logaritmu v bode $x = 1$ lineárnou funkciou

Na záver by som dodal, že keby sme nehľadali dráhu, na ktorej zostane z ľadu polovica, ale dráhu, na ktorej zostane z ľadu q-násobok pôvodnej hmoty, tak by sme rovnakým postupom dostali výsledok

$$s = -\frac{l\ln q}{gf\cos\alpha}\,,$$

z čoho viem získať závislosť zostatkovej čiastky ľadu q od prejdenej dráhy s,

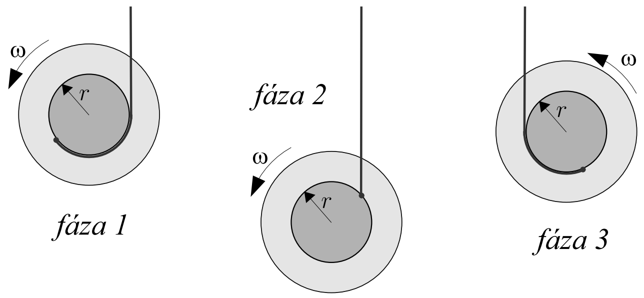
$$q = \exp\left(-\frac{sgf\cos\alpha}{l}\right)\,,$$

kde vidíme exponenciálny pokles hmotnosti s prejdenou dráhou. Ľad sa teda pri prejdení akejkoľvek konečnej dráhy nemá šancu roztopiť. Do života si je rozumné zapamätať, že exponenciálnu závislosť sme dostali z rovnice $\Delta s = c\Delta m/m$, ktorá je charakteristická pre exponenciálnu funkčnú závislosť.

3.7 JOJO (opravoval Samo)

Dané je JOJO: dĺžka špagátika l, vnútorný polomer r, hmotnosť m, moment zotrvačnosti vzhľadom na stred J. Treba určiť periódu JOJA pri voľnom pustení v bezodporovom prostredí a možnú chybu tohoto výpočtu. Pozn.: ta spodná fáza sa dá odhadnúť zdola aj zhora z energetických úvah.

Pozrime sa, ako funguje jojo. Jeden jojo-cyklus pozostáva z troch fáz: pád joja až do okamihu, kedy je už celé lanko odmotané (vtedy je stred joja v rovnakej výške ako spodný koniec lanka), otáčanie „okolo šnúrky“, namotávanie joja na špagátik. V praxi je točenie joja okolo šnúrky zanedbateľne dlhé oproti ostatným fázam, oveľa väčšie chyby spôsobuje napríklad nerovnaká rýchlosť joja pri ceste nadol a nahor.



Obr. 10: Tri fázy jojo-cyklu v obraze

Pri odhadovaní dĺžky pádu joja budeme predpokladať, že rýchlosť cesty nadol a nahor je rovnaká. Na prvý pohľad sa to nezdá ako rozumný predpoklad – pri odraze sa môže kopa energie strácať. Uvedomme si však, že toto je dobre kompenzované tým, že pri hre s jojom lankom trhneme akurát tak, aby nám jojo opäť skončilo v ruke. Hlavný zdroj chýb bude nedokonalosť nášho trhnutia, nevieme dobre odhadnúť jeho silu tak, aby jojo išlo presne rovnakou rýchlosťou späť, ako šlo dole. Pusťme sa do prvej a tretej fázy, za ktoré ste mohli získať spolu slušných šesť bodov.

Dole: Po chvíli zamyslenia inteligentný riešiteľ odhalí vzťah medzi posuvnou a uhlovou rýchlosťou joja,

$$v = \omega r\,.$$

Kinetická energia joja sa dá vyjadriť ako

$$E_\mathrm{k} = 1/2mv^2 + 1/2I\omega^2\,.$$

To však môžeme vďaka vzťahu medzi posuvnou a uhlovou rýchlosťou prepísať na

$$E_\mathrm{k} = 1/2(m + I/r^2)v^2\,.$$

Všimnime si, že kinetická energia joja je rovnaká, ako kinetická energia predmetu s hmotnosťou

$$M_\mathrm{ef} = m + I/r^2\,.$$

Jojo sa teda bráni pohybu rovnako[13] ako teleso s hmotnosťou M_ef, no gravitačná sila ho roztláča len veľkosťou

$$F_g = mg\,,$$

alebo inak napísané

$$F_g = g_\mathrm{ef} M_\mathrm{ef}\,,$$

kde efektívne tiažové zrýchlenie joja je

$$g_\mathrm{ef} = gm/M_{ef}\,.$$

[13] Nad týmto sa treba trochu zamyslieť, ale vyplynie to napríklad z toho, že k jednoznačnému popisu pohybu joja nám stačí poznať v ľubovoľnom bode jeho dráhy rýchlosť a tú vďaka zachovaniu energie poznáme.

Jojo prekoná výšku l za čas

$$t_{\text{dole}} = \sqrt{2h/g_{\text{ef}}}\,,$$

za rovnaký čas sa vyšplhá aj späť. Rovnaký výsledok by sme, samozrejme, získali aj z úvahy o sile lanka použitím Newtonovej rovnice a z nej odvodenej rovnice pre moment sily a uhlové zrýchlenie.[14]

Napriek tomu, že otočka joja trvá zanedbateľne krátky čas, jedná sa o veľmi zaujímavú fázu celého pohybu – bola by škoda nepokúsiť sa pre ňu spraviť nejaké odhady.

Otočka: V momente, kedy sa jojo začne otáčať okolo špagátiku na jeho druhú stranu, má uhlovú rýchlosť ω_{min}, ktorú vieme určiť z jeho kinetickej energie

$$\omega_{\text{min}} = \sqrt{2lg_{\text{ef}}}/r$$

Táto môže po okamih, kým jojo dosiahne spodný bod svojej dráhy, len narastať. To sa dá zdôvodniť jednoducho pozerajúc na momenty síl vzhľadom na ťažisko joja – jediný pôsobiaci nenulový moment sily je od lanka a ten urýchľuje rotáciu joja v prvej polotočke. Druhá polotočka bude trvať rovnako dlho, veď je to symetrické. Preto možno písať odhad

$$t_{\text{otočka}} \leq \pi/\omega_{\text{min}}\,.$$

Kým sa jojo dostane na opačnú stranu lanka, musí najskôr padnúť o r a potom opäť o r stúpnuť. Pritom v prvej polotočke pôsobí lanko na jojo v smere nahor a teda ho brzdí. Na základe toho sme schopný učiniť odhad

$$t_{\text{otočka}} \geq 2r/v_{\text{max}}\,,$$

kde v_{max} je rýchlosť, ktorú by jojo malo naspodku (v hĺbke $l + r$ pod úchytom lanka), keby na začiatku polotočky začalo padať voľným pádom,

$$t_{\text{otočka}} \geq \frac{2r}{v_{\text{max}}} = \frac{2r}{\sqrt{2(lg_{\text{ef}} + rg)}}\,.$$

Diskusia: Na záver sa porozprávajme o zaujímavostiach, ktoré sme počas riešenia taktne zamlčali. Prefíkaného riešiteľa môže zaujímať, či boli oprávnené naše predpoklady o zvislom lanku a symetrickej otočke. Neboli. Ale čo sme mali robiť, úloha je ťažká, život ti nič nedaruje, tak treba občas zaklamať. Odhaľme tento podvod čitateľom. Predpokladajme, že je lanko celý čas zvislé. Všetky sily pôsobiace na jojo musia byť vo vertikálnom smere – horizontálna poloha joja sa nemôže meniť. Avšak pred a po otočke je jojo posunuté o $2r$ voči lanku, ako je to možné? Jedine tak, že sa hýbalo lanko a nie jojo. Vychýlením lanka o $2r$ ho natočíme o uhol približne $2r/l$, čo môžeme za predpokladu $r \gg l$ zanedbať. Prekvapení? Nielenže z predpokladu, že lanko je zvislé, odvodíme jeho naklonenosť o uhol $2r/l$, navyše máme tú drzosť tento výsledok použiť na podopretie oprávnenosti pôvodného predpokladu – matematik by vraždil autora týchto viet. Zvykajte si, toto je fyzika – praktická veda pre praktických ľudí.

[14] Trochu subtílna je analýza, ako vlastne pôsobí tá sila lanka, keď ono je uchytené až po niekoľkonásobnom omotaní vnútra joja, ale aj to sa dá urobiť poriadne.