Fyzikálny korešpondenčný seminár
27. ročník, 2011/2012
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola letnej časti 2011/2012

1.1 B0 – Loďka v akváriu (opravovali Filip a Maťo, vzorák Maťo)

Peťo má veľmi zvláštne maniere. Raz si kúpil akvárium a naplnil ho vodou. To by ešte nebolo také zvláštne. Potom ho ale položil na stôl takým spôsobom, aby takmer spadlo, ale predsa nespadlo.

Takto to bolo niekoľko dní. Potom Peťo pozeral ako sa obrovská loď s kapacitou 4 000 ľudí neďaleko Talianska potápa a povedal si, že to chce zopakovať v jeho akváriu. Zobral si teda kovovú loďku s dierkou (to aby vnikala voda) a položil ju do akvária v časti, ktorá pretŕčala cez okraj stola.

Popíšte podrobne, čo presne sa stane s akváriom, loďkou a Peťom.

Princíp P, z ktorého budeme vychádzať, je nasledovný. Tlak vody v hĺbke h pod hladinou je o hodnotu $h\rho g$ vyšší ako tlak (atmosférický) na hladine. Tento princíp platí dovtedy, kým sa všetky zmeny vonkajších podmienok odohrávajú dostatočne pomaly na to, aby vo vode nevznikali silné prúdenia (to platí, ak je dierka v lodi dostatočne malá).

Na základe princípu P sa nám akvárium neprevráti ani keď loďka klesá, ani keď pláva na hladine, pretože nech už loďka na hladine ovplyvní tlak na dne akokoľvek, ovplyvní ho rovnomerne. Na domácu úlohu sa môžete zamyslieť, o koľko je tlak s plávajúcou loďkou hmotnosti m na dno nádoby vyšší a ako to súvisí s Archimedovým zákonom (výška hladiny stúpne v dôsledku vytlačenia vody loďkou).

Kým loďka klesá, vztlaková sila, ktorou na ňu pôsobí voda, je menšia ako tiažová, ktorá ju ťahá ku dnu. Keď loďka narazí na dno, klesať prestane, a to vďaka tomu, že dno v mieste dotyku začne na loďku pôsobiť silou smerom nahor a vykompenzuje zvyšok tiaže. Keď však dno pôsobí silou na loďku, musí aj loďka pôsobiť na dno a táto sila (jej veľkosť je tiaž mínus vztlak) akvárium preváži, a to padne Peťovi na hlavu.

Pri výpočte sme uvažovali, že na obe strany dna stále pôsobí rovnako veľká hydrostatická sila. To však nebude pravda v prípade, že sa loďka bude nezanedbateľne veľkou plochou dna dotýkať. Na túto námietku sú dve dôležité odpovede. Nultá odpoveď vás upozorní, že tento efekt v konečnom dôsledku nič neovplyvní a nechá vás si samých premyslieť, prečo je to tak. Prvá odpoveď prezradí, že v praxi je veľmi náročné vytvoriť povrchy také hladké, že sa medzi ne nezmestí voda. Schválne, skúste na dno akvária ponoriť kocku ľahšiu ako voda tak, aby nevyplávala na povrch, nepodarí sa vám to. Keby sa kocka dotýkala na celej spodnej stene akvária, hydrostatický tlak by na ňu pôsobil len zhora a na bokoch a tieto sily ju nemôžu prinútiť vyplávať na povrch. To však znamená, že na kocku pôsobí hydrostatická sila aj zo spodnej steny, a preto tam musí byť voda.

1.2 B1 – Híd (opravoval Petrík)

Keď bol Polik malý, veľmi rád sa bicykloval. Občas meškal domov na večeru a vtedy sa mu hodila každá ušetrená sekunda.

Seminár podporujú:

Prechádzal aj cez pomerne vysoký híd dĺžky l postavený nad údolím tvaru V s klesaním (a následným stúpaním) pod uhlom α.

V doline pod hídom iniciatívny cestári vybudovali chodník. Mohol si teda vybrať: buď pôjde po híde rýchlosťou v, alebo sa s počiatočnou rýchlosťou v spustí dole chodníkom a následne vyjde hore.

Ktorú z možností si má vybrať, aby bol čo najskôr doma? Pri riešení neuvažujte odpor vzduchu.

Na úvod treba povedať, že niekoľko riešiteľov nesprávne pochopilo úlohu, na čom máme svoj nemalý podiel zodpovednosti práve my. Na druhej strane, ak si riešiteľ nie je niečím istý, nemal by sa báť napísať a žiadať o vysvetlenie.

Kde presne došlo k nedorozumeniam? Pri ceste cez dno doliny sa predpokladá, že Polik nestratí nič zo svojej energie, a teda smerom k domu sa začne štverať rýchlosťou, ktorú nabral pri spustení sa dolu kopcom (bez toho, aby pritom musel pedálovať). V reči energie:

$$K_{\text{hore}} + U = K_{\text{dole}}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mV^2 = \text{konštanta}, \tag{2}$$

kde $y = \frac{1}{2}l\,\mathrm{tg}\alpha$ je hĺbka doliny a V rýchlosť na jej dne. Táto energia počas pohybu nikam nemizne, a preto po vystúpaní na pravú stranu doliny bude mať Polik rovnakú rýchlosť ako na začiatku.

Ďalej, rýchlosť Polika tesne po nabehnutí na most je rovnaká ako jeho počiatočná rýchlosť pri spustení sa dolu kopcom. Rozdiel je len v smere, čo pre túto úlohu nie je podstatné. Počas prechodu po moste sa jeho rýchlosť nemení, t. j. neuvažujeme žiadne trenie.

No a napokon to, čo sme od vás chceli spočítať, je, ako sa má Polik rozhodnúť na základe poznatku o svojej rýchlosti. V úlohe vystupujú konštantné parametre – uhol α a dĺžka mosta l. Sedliacky rozum nám káže, že tie Polik pozná a jediná vec, ktorú môže ovplyvniť, je teda jeho rýchlosť.

Tak, pustime sa do riešenia! Označme T_2 dobu cesty cez dolinu. (Cesta po moste trvá $T_1 = l/v$.) Zo symetrie problému vyplýva, že cesta dolu kopcom potrvá rovnako dlho ako cesta hore kopcom. Označme čas dolu kopcom $t_2 = T_2/2$. Pre dĺžku cesty na dno doliny L platí, že $l/2 = L\cos\alpha$. Zrýchlenie Polika v dôsledku tiažového poľa je $g\sin\alpha$.

Ešte pred samotným počítaním sa skúsme zamyslieť, čo možno očakávať. Pozrime sa napríklad na extrémne podmienky, a to veľmi malé a veľmi vysoké rýchlosti v. Ak pôjde Polik na začiatku pomaly, tak vo vzorci pre potenciálnu energiu bude možné rýchlosť v zanedbať a jeho rýchlosť na dne doliny bude $V = \sqrt{2gy}$. Čas, za ktorý sa dostane domov cez dolinu, bude $T_2 = 2\sqrt{l/g\sin\alpha\cos\alpha}$,[1] zatiaľ čo čas T_1 bude kvôli malej rýchlosti v „dosť veľký“. Oplatí sa teda ísť cez dolinu.

Na druhej strane, pokiaľ bude rýchlosť na začiatku veľmi veľká, rýchlosť na dne doliny bude približne rovnaká. Cesta cez dolinu má však dĺžku $l/\cos\alpha$, čo je viac ako l. Preto sa v tomto prípade oplatí ísť po moste. Teda niekde medzi veľmi malou a veľmi veľkou rýchlosťou leží bod, v ktorom trvá cesta po moste rovnako dlho ako cesta cez dolinu. Skúsme ho nájsť!

Kinematika prvého ročníka nás naučila, že pre rovnomerne zrýchlený pohyb platí:

$$L = vt_2 - \frac{g\sin\alpha}{2}t_2^2. \tag{3}$$

[1] Spočítajte si to sami, je to dobrý tréning!

Po preskupení a dosadení za L získavame kvadratickú rovnicu pre t_2:

$$t_2^2 + \frac{2v}{g\sin\alpha}t_2 - \frac{l}{g\sin\alpha\cos\alpha} = 0, \tag{4}$$

ktorej riešením je:

$$t_2 = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + lg\,\mathrm{tg}\alpha}}{g\sin\alpha}. \tag{5}$$

Pre ďalší postup vyberáme kladný koreň, pretože ten záporný dáva záporný čas t_2, čo sa veľmi pre náš fyzikálny svet nehodí.

Teraz nám už len zostáva zistiť, ktorá cesta trvá kratší čas. Hľadáme rýchlosť, pre ktorú platí $T_1 = T_2$, alebo presnejšie:

$$\frac{l}{v} = \frac{-2v + 2\sqrt{v^2 + lg\,\mathrm{tg}\alpha}}{g\sin\alpha}, \tag{6}$$

$$\frac{2\sqrt{v^2 + lg\,\mathrm{tg}\alpha}}{g\sin\alpha} = \frac{2v}{g\sin\alpha} + \frac{l}{v}. \tag{7}$$

Po surovom umocnení na druhú a vykrátení niektorých členov dostávame:

$$\frac{4l}{g\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{4l}{g\sin\alpha} + \left(\frac{l}{v}\right)^2 \tag{8}$$

a po finálnych úpravách konečne získavame vzťah pre rýchlosť:

$$v = v_0 = \sqrt{\frac{gl\sin\alpha\cos\alpha}{4(1-\cos\alpha)}}. \tag{9}$$

Po kope škaredo vyzerajúcich rovníc na záver ešte rekapiulácia – ak Polik ide na bicykli rýchlosťou väčšou ako v_0, oplatí sa mu ísť po moste. V opačnom prípade by sa mal spustiť dolinou.

1.3 B2 – Kocka (opravovali Aďa a Filip, vzorák Filip)

Marika má strašne rada kocky a zvieratká. A balóny. A tak jej jedného dňa napadlo, že Samovi pripraví úlohu vyrobiť balón v tvare kocky.

Poraďte Samovi, ako taký balón vyrobiť, či aspoň dobrú výhovorku, prečo sa to nedá.

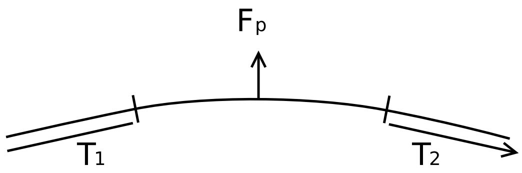
Kde bolo, tam bolo, tam kde sa voda sypala a piesok lial,… ale ani tam neboli kockaté balóny. Prečo? Odpoveď nám pomôžu nájsť tlaky a napätia v stene balónika.

Jednou z vlastností balónikov je, že sú veľmi tenké.[2] Môžeme ich teda uvažovať len ako plochy. Celú plochu si rozdelíme na drobné plôšky a pozrieme sa bližšie na jednu z nich.

Balónik je nafúknutý a tlak vovnútri je väčší ako ten vonku. Na našu plôšku teda pôsobí výsledná tlaková sila smerom von. Keď je balónik už nafúknutý, už sa nehýbe, a teda výslednica

[2] A tou druhou, že sa dajú nafukovať, čiže nemôžu byť z pevnej konštrukcie.

pôsobiacich síl musí byť nulová. To znamená, že okrem tlakovej sily musia na našu plôšku pôsobiť napäťové sily v materiáli, ktorých výslednica je presne opačná.[3]



Obr. 1: Na povrchu balónika

Napäťové sily ťahajúce okraje našej plôšky však musia pôsobiť len v smere dotyčnice k ploche – molekuly steny balónika sa môžu buď priťahovať alebo odpudzovať. Aby ich výslednica nebola nulová, ale opačná k tlakovej sile, musia mať rôzny smer. Teda dotyčnice k plôške na jej okrajoch musia mať iný smer.[4] Konkrétne, naša plôška musí byť trošku zakrivená smerom dnu, lebo molekuly sa priťahujú.

Ako veľmi bude zakrivená, to už závisí od tlaku a materiálu balónika. Dôležité je, že aspoň trochu musí byť zakrivená vždy, čo je v spore s rovnými stenami kocky. Čiže sa to nedá. A žili šťastne, až kým nepraskli...

1.4 B3+A1 – Netypické dievča (opravovala Tinka)

Tina je trochu netypické a dievča a má rada dráhy a autodráhy a horské dráhy a tak. Raz si postavila dráhu v tvare funkcie $\cos(x^2)$ s výškou $20\ \mathrm{cm}$ (rozdiel medzi najvyšším a najnižším miestom). Na začiatok tejto dráhy dala autíčko rozbehnuté na rýchlosť $10\ \mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Za aký čas sa autíčko dostane na spodok piateho klesania? Neváhajte použiť počítač...

Ako už zadanie naznačovalo, oplatí sa použiť nejakým spôsobom počítač. Napríklad taký tabuľkový kalkulátor by na postačujúcej úrovni mal ovládať každý. Treba však najprv vedieť, čo tam chceme hádzať.

Kľúčom k nášmu úspechu bude zákon zachovania energie. Keďže trenie a iné odporové sily zanedbáme (nemáme k nim žiadne údaje, čiže je to to najlepšie, čo s nimi vieme spraviť), vieme (ak poznáme aktuálnu výšku autíčka) spočítať veľkosť rýchlosti. Druhou dôležitou informáciou, ktorú nám ZZE poskytuje, je, či sa vôbec do piatej dolinky auto dostane. Problém by mohol byť v tom, že bude mať primalú rýchlosť a na niektorý kopček sa nevyštverá a začne padať (t. j. v nejakom okamihu bude mať nulovú rýchlosť). Lenže ak si predstavíte kosínus, tak ten nikdy nenadobudne väčšiu hodnotu ako v bode, odkiaľ sme autíčko spúšťali, a teda tu má maximálnu potenciálnu energiu. Preto jeho rýchlosť bude vždy aspoň $10\,\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Nasleduje technické okienko. Ak má byť dráha vysoká $20\,\mathrm{cm}$ a rozpätie kosínusu je len 2, musíme jeho hodnoty vynásobiť $10\,\mathrm{cm}$. Aby sme však zachovali tvar, treba pozmeniť aj argument. Po troške premýšľania prídeme[5] na to, že to pravé bude $\cos[(x/10\,\mathrm{cm})^2]$. Odteraz

[3] Kto chce, môže si pre jednoduchosť nahradiť plôšky drobnými guľôčkami a napäťové sily si môže predstaviť ako natiahnuté pružinky.

[4] Teraz všetko riešime v rovine rezu, vyjadrovanie v 3D by bolo neprehľadné, ale fyzika tá istá.

[5] Keby to niekomu predsa len spôsobilo bezsenné noci, nech volá na známe telefonne číslo 0904... alebo napíše autorke.

budeme automaticky pracovať už len s číselnými hodnotami, ktoré budeme chápať ako dĺžku v centimetroch.[6]

Čo my vieme počítať sú rovnomerné priamočiare pohyby. Tak to na ne nenápadne znásilníme. Ak si podelíme x-ovú os na maličké dieliky, môžeme si našu funkciu $\cos(x^2)$ nahradiť funkciou po častiach lineárnou. Funkciou, ktorá je medzi dvoma dielikmi x_i a x_{i+1} úsečkou medzi bodmi $[x_i, 10 \cdot \cos(\frac{1}{100} \cdot x_i^2)]$ a $[x_{i+1}, 10 \cdot \cos(\frac{1}{100} \cdot x_{i+1}^2)]$.

Teda teraz už vieme spočítať, aká dlhá je dráha, po ktorej sa auto dostalo na x-ovej osi z x_i do x_{i+1}.[7] Aby sme vedeli odhadnúť aj čas, za ktorý ju prešlo, zišlo by sa nám poznať rýchlosť auta. Môžeme použiť tú v bode $[x_i, 10 \cdot \cos(\frac{1}{100} \cdot x_i^2)]$ a tváriť sa, že kým sa presunulo na koniec úsečky, tak sa rýchlosť priveľmi nezmenila. Tým vieme odhadnúť čas, za ktorý sa tento posun udial. Ak zvolíme deliace body dosť husto pri sebe, tak intuitívne sa zdá, že sa veľmi od reality neodchyľujeme. Ako veľmi jemne deliť, to je vecou hrajkania sa. Pokiaľ sa vám výsledok príliš nezmení pri zdvojnásobení hustoty bodov, zrejme ste blízko.

Poslednou otázkou je, kde sa vlastne nachádza piate údolie. Matematický prístup – funkcia kosínus má minimá vždy v $(2n+1)\pi$. Piate sa preto nachádza v 9π. Takže musí platiť $9\pi = \frac{1}{100} \cdot x^2$. Inžinieri si v tom svojom Exceli pozrú, kedy sa im piatykrát blíži y-ová súradnica k -10, a vyčítajú príslušný čas.

Keby to niekoho zaujímalo, mne to vyšlo cca. $2{,}323\,\mathrm{s}$.[8]

1.5 B4+A2 – Tanier (opravoval Mišo)

Odmerajte moment zotrvačnosti skleneného taniera okolo osi, ktorá prechádza jeho stredom a je kolmá na tanier. Porovnajte, o koľko sa Vami nameraná hodnota líši od hodnoty pre plochý disk ($\frac{1}{2}mr^2$).

Roztáčať tanier okolo stredu je pomerne nepraktické, vznikajú isté problémy s uchytením. Tým sa však dá vyhnúť, ak si spomenieme na Steinerovu vetu. Stačí, ak sa nám podarí odmerať moment zotrvačnosti taniera okolo osi, ktorá je rovnobežná s osou požadovanou v zadaní. Vzťah:

$$I_\mathrm{t} = I - md^2, \tag{10}$$

kde d je vzdialenosť osí, nám potom pomôže určiť hodnotu momentu zotrvačnosti v ťažisku.

Moment zotrvačnosti ľahko odmeriame, ak si spomenieme na vzťah pre periódu otáčania sa fyzikálneho kyvadla:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mdg}}, \tag{11}$$

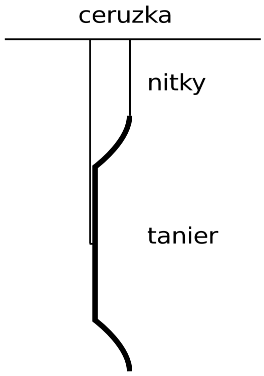
kde I je moment zotrvačnosti vzhľadom na bod závesu a d je vzdialenosť bodu závesu a ťažiska, teda spomínané vzdialenosť osí. Teda:

$$I_\mathrm{t} = md\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - d\right). \tag{12}$$

Ak zvolíme d príliš veľké, tak aj pri malých nepresnostiach T bude táto násobená hodnotou md, čo môže pri veľkých d nepresnosť podstatne zväčšiť. Zvolíme preto d čo najmenšie, avšak také, aby sa nám pohodlne meralo.

[6] Na stopy si to prerátajte sami.
[7] Pytagorova veta, vieme, však?
[8] Stále nevieš, ako by si to teda prakticky spravil? Môžem poslať ukážku.

V súlade s teoretickým modelom si zostrojíme aparatúru. Na tanier sme páskou pripevnili dve šnúrky, jednu zospodu taniera a druhú zvrchu na okraj. Zaviažeme ich na ceruzku a nastavením správnej dĺžky vieme zaistiť, aby os, okolo ktorej sa tanier bude pri kývaní otáčať, bola rovnobežná s osou taniera a zároveň zabránime nežiaducemu otáčaniu okolo iných osí. Odmeriame dobu, za ktorú tanier 40-krát prekmitne cez rovnovážnu polohu, pričom stopky spustíme pri prvom prechode touto polohou. 40 prekmitnutiam rovnovážnou polohou potom zodpovedá 20 periód. Tiež odvážime tanier a odmeriame vzdialenosť osi taniera od osi otáčania.



Obr. 2: Zásady stolovania

Meranie sme 10-krát opakovali a štatisticky sme vypočítali priemernú hodnotu jedného kmitu a jej smerodajnú odchýlku:

$$T = (0{,}81 \pm 0{,}01)\,\mathrm{s}. \tag{13}$$

Hmotnosť taniera sme určili na digitálnych kuchynských váhach ako:

$$m = (0{,}415 \pm 0{,}005)\,\mathrm{kg} \tag{14}$$

a vzdialenosť osi taniera a bodu závesu:

$$d = (0{,}114 \pm 0{,}001)\,\mathrm{m}. \tag{15}$$

Presnosť týchto hodnôt je určená presnosťou váh a metra. Ako hodnotu gravitačného zrýchlenia berieme:

$$g = (9{,}81 \pm 0{,}02)\,\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}. \tag{16}$$

Po dosadení do rovnice (12) dostaneme $I \approx 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2}$. Zostáva nám určiť chybu merania.

Ako vieme, pri súčte a rozdiele sa sčítava absolútna chyba výsledku, pri násobení a podiele sa sčítavajú relatívne chyby. Relatívna chyba určenia T bola 1,2 %, relatívna chyba g dve desatiny percenta. Relatívna chyba výrazu gT^2 je teda 2,6 %. Absolútna chyba zátvorky nám potom vyjde približne $6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. To dáva relatívnu chybu zátvorky približne 11 %.

Spolu tak dostávame relatívnu chybu celého výsledku 13 %. Hodnota momentu zotrvačnosti činí:

$$(2{,}3 \pm 0{,}3) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot m^2}. \tag{17}$$

Hodnota momentu zotrvačnosti vypočítaná vzťahom $\frac{1}{2}mr^2$ dáva $2{,}16 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$, takže táto hodnota sa nachádza v intervale presnosti nášho merania.

1.6 A3 – Fatamorgána (opravovala Kamila)

Bum pri sledovaní Hviezdnych vojen narazila na veľmi zaujímavú scénu. Mladý Anakin s kráľovnou Amidalou pozorujú na svojej planéte piesok. Upútalo ich, že je dokonale rovný ako najrovnejšie roviny na Zemi. Zrazu si všimli, že majú pred sebou jazero. V skutočnosti to bol však iba odraz oblohy nad nimi. Vysvetlite, prečo tento úkaz videli. Teplota vzduchu vo výške očí je $30\ ^\circ\mathrm{C}$ a pri zemi sa šplhá až na $60\ ^\circ\mathrm{C}$.

V dôsledku našej nedôkladnosti nebolo zadanie príkladu takmer nikým správne pochopené. Chceli sme od vás, milí riešitelia, kvantitatívne vysvetlenie celého javu, nanešťastie sme sa nedostatočne vyjadrili. Z toho dôvodu tento príklad odkladáme do budúceho roka, preto vzorové riešenie neuvedieme.

Za pochopenie ďakujeme.

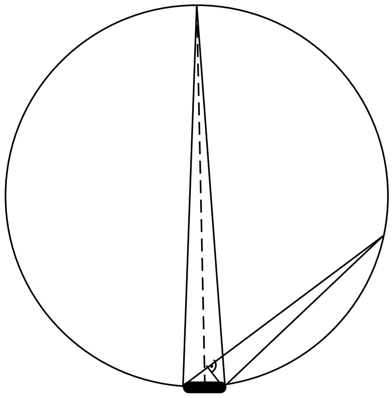
1.7 A4 – Jurove gule (opravovala Marika)

Juro ani pri robení veľkej vedy nezabudol na svoje detské metalové časy. Keďže bol správny metalista, mali doma dokonale čierne vianočné gule s obrovskou tepelnou kapacitou (prakticky nekonečnou) a polomerom r. Keďže bol mladý vedec, tak vložil jednu takúto guľu do stredu väčšej vianočnej gule s polomerom $2r$ a dokonale čiernym vnútorným povrchom s malou tepelnou kapacitou, zato však dokonale tepelne izolovanú od vonkajšieho (nie vnútorného) sveta. Obe gule mali na začiatku teplotu $T = 300\ \mathrm{K}$. Aká bude teplota vonkajšej gule po ustálení?

Toto bola jedna z úloh, kde ste si (poväčšine) povedali: „To nemôže byť také ľahké!“, a preto ste to (všetci) porátali zložitejšie a žiaľ aj zle. Správne riešenie bolo, že telesá v rovnováhe musia mať rovnaké teploty. Prečo to tak musí byť, hovorí prvá veta termodynamická – teplo vždy spontánne tečie z teplejšieho telesa na chladnejšie a aby to bolo naopak, museli by sme konať prácu. Preto v rovnováhe, kedy je už tok tepla nulový (všetko čo pritečie aj vytečie), musia mať telesá rovnaké teploty. To platí o akomkoľvek prenose tepla, či už mechanickom cez molekuly plynu, ale aj pre žiarenie.

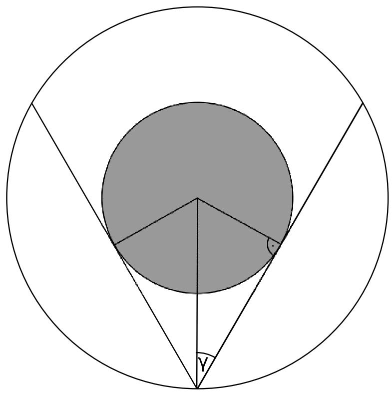
Že teploty musia byť rovnaké, to sa dá vidieť aj iným spôsobom, a to privedením do sporu. Predstavte si, že máme gule v rovnováhe a ich teploty sú rôzne. Mohli by sme potom zobrať tepelný stroj (napríklad Carnotov), ktorému by jedna guľa slúžila ako chladič a druhá ako ohrievač. Takýto stroj by konal prácu a teploty gúľ by vyrovnával (samozrejme pri zachovaní celkovej energie). Po jeho odpojení by ale zas vznikol rozdiel medzi teplotami gúľ, stroj by sme mohli pripojiť znovu a perpetuum mobile by bolo na svete! Ľaľa, zas sa ukáže druhá veta termodynamická, a teda teploty musia byť rovnaké.

Skúsme ešte porátať príklad špeciálne pre žiarenie. V rovnováhe musí platiť, že vyžiarený výkon P_{out} je rovný výkonu P_{in}, ktorý na teleso dopadá. Zo Stefan-Boltzmannovho zákona vieme, že čierne teleso žiari s výkonom $P_{\mathrm{out}} = \sigma T^4 S$, kde S je jeho plocha, T teplota a σ Stefan-Boltzmannova konštanta. Vezmime si teraz malú plôšku na povrchu gule a skúmajme, ako žiari do rôznych strán. Jeden by mohol povedať, že žiari rovnomerne do polgule okolo nej. To ale nie je pravda! Žiarenie od elementárnej plôšky je úmerné priestorovému uhlu, pod ktorým ju vidíme ako na obr. 3. To potom znamená, že žiarivý tok do daného smeru je úmerný kosínusu uhla meraného od kolmice. Tento poznatok sa volá Lambertov (kosínusový) zákon a zaručuje, že ak si vezmeme dve ľubovoľne natočené elementárne plôšky s rovnakou teplotou, budú na seba žiariť rovnako.



Obr. 3: Lambertov zákon

Druhá vec, na ktorú netreba zabúdať, je, že aj keď všetko žiarenie z malej gule dopadá na veľkú guľu, nie všetko žiarenie z vonkajšej gule dopadá na vnútornú guľu. Zvoľme si malú plôšku na veľkej guli a označme ju dS. Keď si nakreslíme obrázok, uvidíme, že na malú guľu dopadá len žiarenie smerujúce do kornútka tvoreného dotyčnicami a zvyšok dopadá opäť na veľkú guľu. Ľahko nahliadneme, že pre uhol γ na obr. 4 platí $\sin\gamma = 1/2$, a teda $\gamma = 30\,^\circ$.



Obr. 4: Geometria

Teraz budeme chcieť zrátať, koľko žiarenia dopadne do kornútka:

$$P = \sigma T_v \mathrm{d}S \frac{2\pi}{4\pi} \int_0^{30\,^\circ} \cos\phi \,\mathrm{d}\phi, \tag{18}$$

kde sme teplotu veľkej gule označili T_v. Využili sme, že situácia je rotačne symetrická okolo prerušovanej osi na obrázku, preto stačí rátať integrál z kosínusu od 0 po $30\,^\circ$ a výsledok násobiť 2π za otočenie. Ďalej sme museli deliť 4π, pretože nás zaujíma, akú časť priestorového uhla vytne kornútok a plný priestorový uhol je 4π. Keďže integrál z $\cos\phi$ je $-\sin\phi$, dostávame:

$$P = \frac{1}{4}\sigma T_v \mathrm{d}S \tag{19}$$

To platí pre každú elementárnu plôšku na veľkej guli, a preto namiesto $\mathrm{d}S$ môžeme písať plochu veľkej gule $4\pi(2r)^2$, a teda celkový žiarivý výkon dopadajúci z veľkej gule na malú guľu bude:

$$P_{\text{in}} = 4\pi r^2 \sigma T_v \tag{20}$$

Spočítajme ešte, koľko tepla malá guľa vyžiari pri teplote T_m:

$$P_{\text{out}} = 4\pi r^2 \sigma T_m. \tag{21}$$

Ak má byť teda sústava v rovnováhe, musí platiť:

$$P_{\text{in}} = P_{\text{out}}, \tag{22}$$

$$4\pi r^2 \sigma T_v = 4\pi r^2 \sigma T_m, \tag{23}$$

$$T_v = T_m. \tag{24}$$

Teploty sa musia rovnať, teda sme sa dostali k tomu istému výsledku ako z termodynamickej úvahy, akurát krkolomnejšou cestou s integrálmi a netriviálnymi vedomosťami.