Fyzikálny korešpondenčný seminár
27. ročník, 2011/2012
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2011/2012

2.1 B0 – Hranol (opravovala Marika, vzorák Samo)

Na dokonale klzkom stole je položený dokonale klzký hranol trojuholníkového tvaru. Po oboch jeho stenách spustíme v rovnaký okamih dokonale klzké kvádre. Určte pomer ich hmotností v závislosti od uhlov α, β hranola tak, aby sa hranol nepohol.

Ujasnime si všetky sily, ktoré v príklade pôsobia:

1. Gravitačné sily pôsobiace na hranoly. Ich veľkosti sú mg a Mg.
2. Reakcie na ne – gravitačné sily, ktorými hranoly priťahujú Zem.
3. Trecie sily v našom príklade sú nulové, všetko je dokonale šmykľavé.
4. Sily, ktorými trojuholník pôsobí na hranoly. Označíme ich F_n a F_N. Sú kolmé na povrch hranolov aj trojuholníka.
5. Sily, ktorými hranoly tlačia na trojuholník. Sú to reakcie na sily, ktorými trojuholník pôsobí na hranoly. Preto ich budeme označovať F'_n a F'_N. Budeme si pamätať, že majú rovnakú veľkosť a opačný smer ako sily F_n a F_N.
6. Sila F_y, ktorou podložka pôsobí na trojuholník.
7. Reakcia na ňu – sila F'_y, ktorou pôsobí trojuholník na podložku.

Vidíme, že síl je veľa. To však len preto, že sme boli skutočne dôslední. Mnohé z nich nás nezaujímajú – je nám jedno, aké sily pôsobia na Zem, prípadne podložku. Zo siedmich síl nám tak zostane len päť zaujímavých a aj z toho sú dve vo vzťahu akcie a reakcie.

Začneme tým, že zistíme veľkosti síl F_n a F_N. Hranoly sa môžu hýbať len v smere rovnobežnom so stenami trojuholníka. Chceli by ísť kolmo nadol, ale trojuholník im to nedovolí – zabraní im v tom silou. Sily F_n a F_N musia byť akurát také veľké, aby výslednice síl na oba hranoly mali smery rovnobežné so stranami trojuholníka.

Gravitačná sila pôsobiaca na malý kváder sa dá napísať ako súčet myslenej sily v smere kolmom na trojuholník veľkosti $mg\cos\alpha$ a myslenej sily rovnobežnej s trojuholníkom veľkosti $mg\sin\alpha$. Z predošlej úvahy potom vyplýva rovnosť $F_\mathrm{n} = mg\cos\alpha$. Analogicky $F_\mathrm{N} = Mg\cos\beta$.

Trojuholník by sa pod vplyvom týchto síl tiež chcel pohybovať všelijako, ale podložka mu to nedovolí. Silou F_y ho prinúti hýbať sa len v smere rovnobežnom s ňou.

Seminár podporujú:

Sila od kvádrov pôsobiaca na trojuholník sa dá napísať ako súčet myslenej sily v smere rovnobežnom s podložkou veľkosti:

$$F_x = mg\cos\alpha\sin\alpha - Mg\cos\beta\sin\beta$$

a myslenej sily v smere kolmom na podložku veľkosti:

$$mg\cos^2\alpha + Mg\cos^2\beta\,.$$

Druhá menovaná bude na základe predošlej úvahy rovná F_y a celková sila pôsobiaca na kváder bude F_x.

Zadanie od nás chce, aby trojuholník stál, a teda $F_x = 0$. Pre pomer hmotností z toho dostávame podmienku:

$$\frac{M}{m} = \frac{\cos\alpha\sin\alpha}{\cos\beta\sin\beta}\,.$$

Matematicky skúsenejší to napíšu v krajšom tvare:

$$\frac{M}{m} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}\,.$$

2.2 B1 – Presýpacie hodiny (opravoval Ado, vzorák Samo)

Dokonalý Maťo položil na dokonalé váhy presýpacie hodiny. V jednom momente zapol presýpanie a sledoval údaje na váhe. Nakreslite, ako sa vyvíjala hmotnosť zobrazovaná váhou v čase od začiatku presýpania až po jeho koniec.

Máme nasledujúci model. Presýpacie hodiny[1] položené na dokonalej váhe v tiažovom poli Zeme. Na začiatku je horná časť naplnená určitým množstvom piesku a uzavretá vyťahovateľnou priehradkou. Po vytiahnutí priehradky sa piesok začne sypať. Celý systém ma hmotnosť M.

Váha nie je prístroj na meranie hmotnosti, ale prístroj na meranie sily. Preto aj my budeme počítať, akou silou pôsobia hodiny na váhu a táto sila nebude stále rovnaká. Pri počtoch nám pomôže známy Newton zákon:

$$F = \mathrm{d}p/\mathrm{d}t\,,$$

kde symbol d znamená to isté ako Δ s tým rozdielom, že d je veľmi malé.

Pred spustením má celý systém nulovú hybnosť, piesok stojí, hodiny tiež. Celková sila naň pôsobiaca je preto tiež nulová. Ak označíme silu od váhy $-F_\mathrm{v}$, platí:

$$-F_\mathrm{v} + Mg = 0\,.$$

Na váhu teda pôsobí sila veľkosti Mg.

Po vytiahnutí prepážky sa piesok začne sypať a celková hybnosť systému vzrastie (časť sa hýbe smerom dole, ťažisko klesá). Spravme zjednodušujúce predpoklady, že väčšinu času sa množstvo padajúceho piesku vo vzduchu nemení (rovnako veľa dopadne ako začne padať) a že

[1] Na detailoch tvaru (v rámci rozumných možností) nezáleží. Teda pokojne môžeme uvažovať presýpacie hodiny s rovnými stenami (prierez hornej časti tvaru V) alebo napr. parabolickými (prierez tvaru U), no nie hodiny s prierezom tvaru časti sínusoidy…

priemerná rýchlosť padania piesku je po väčšinu času konštantná. O oprávnenosti predpokladov podiskutujeme neskôr.

Ak sa množstvo padajúceho piesku a ani jeho priemerná rýchlosť nemení, systém má konštantnú hybnosť p. Kde nie je zmena hybnosti, tam nie je zrýchlenie ani sila. Celková sila pôsobiaca na naše hodiny je teda nulová a váha správne ukazuje hmotnosť M.

Tak to však nemohlo byť vždy. Na začiatku bola hybnosť nulová a o nejaký čas vzrástla na hodnotu p (v smere nadol). Počas tohto času teda musela byť celková sila pôsobiaca na systém nenulová a mať smer nadol. Gravitačná sila sa zväčšiť nemohla, musela sa zmenšiť sila pôsobiaca na váhu a váha ukazovala v priemere menej.

Rovnako, po presypaní sa celého piesku je hybnosť sústavy opäť nulová a na nulu musela klesnúť z hodnoty p. Ku koncu preto na systém pôsobila sila v smere nahor, a teda váha ukazovala v priemere viac, ako mala.

Teraz si rozoberieme jednotlivé predpoklady. Prvý predpoklad môže ku koncu presýpania prestať platiť – hore je menej piesku, teda menší tlak a menej sa ho pretlačí cez dierku. Väčšinu času by s ním však nemal byť problém, pokiaľ sa nemení výška, z ktorej piesok padá.

Druhý predpoklad je splnený, ak sa nemení výška, z ktorej zrkná padajú.[2]

Výška sa samozrejme trochu mení – dolu rastie kôpka a piesok padá stále z menšej a menšej výšky. Ak toto zohľadníme, zistíme, že hybnosť p systému preto nebude úplne konštantná, ale bude postupne klesať. Váha teda bude ukazovať v priemere trochu viac, ako by mala. Ak sú však hodiny dostatočne široké (kopček je zanedbateľný oproti výške, z ktorej to padá), tento efekt bude zanedbateľný oproti ostatným v úlohe.

Navyše si treba uvedomiť, že dobré presýpacie hodiny sú skonštruované tak, aby sa väčšinu času presýpali rovnomerne (presype sa polovica piesku – uplynula polovica času), a to je presne to, čo sme predpokladali.

2.3 B2 – Puk (opravoval Maťo)

Na ľade stojí puk. Stojí. Nehýbe sa. Prejdime do rotujúcej vzťažnej sústavy so stredom v strede puku, ktorá rotuje obrovskou rýchlosťou. Fakt veľkou. V tejto sústave na všetky predmety pôsobí obrovská odstredivá sila, ako je v rotujúcich sústavách zvykom. Teda, aj na puk. Puk by sa mal preto roztrhnúť, to sa však nestane, lebo je to zjavná blbosť. Kde je chyba v našej úvahe?

V tomto vzoráku odpovieme na tri dôležité otázky o vesmíre, živote a vôbec: čo je to vzťažná sústava, čo je to dostredivá sila, čo je odstredivá sila a aké iné sily pôsobia v neinerciálnych sústavách. Tak zatajte dych a čítajte ďalej.

Čo je to vzťažná sústava? Ako si predstaviť vzťažnú sústavu? Každú správnu vzťažnú sústavu určujú tri nekonečné, navzájom kolmé nehmotné pravítka, ktoré sa pretínajú v nule, a tento priesečník je spojený s (egocentrickým) pozorovateľom. Ak má nejaký objekt v tejto sústave stále rovnaké súradnice na všetkých troch osiach, nemení sa jeho poloha v tejto sústave, a teda nehýbe sa.

[2] Vďaka existencii odporu vzduchu bude dobre splnený aj vtedy, ak sa výška mení. Odpor vzduchu zabezpečí, že všetky zrnká dosiahnu rýchlo medznú rýchlosť v a ďalej padajú konštantnou rýchlosťou, kým nenarazia.

Čo je dostredivá sila? Jednoducho napísané, je to vždy tá sila, ktorá spôsobuje pohyb telesa po kružnici. Pôsobí teda v sústave, v ktorej sa teleso naozaj hýbe po kružnici. Napríklad, ak by sme vo vesmíre hodili kameň vodorovne, bude letieť rovno do nekonečna a ešte ďalej. Ak by sme ho ale pred hodom uviazali na šnúrku, bude sa točiť donekonečna a ešte dlhšie. Šnúrka naň totiž pôsobí dostredivou silou a tak zakrivuje jeho trajektóriu. Označme m hmotnosť kameňa, v jeho rýchlosť a R polomer kružnice, po ktorej sa kameň točí. Veľkosť sily od šnúrky potom musí byť:

$$F_{\text{dostreď}} = m\omega^2 R$$

a smer tejto sily je kolmý na okamžitý smer rýchlosti kameňa. Úlohu dostredivej sily môže hrať aj gravitačná sila, ktorá spôsobuje pohyb planét okolo Slnka, magnetická sila, ktorá spôsobuje zakrivenie dráhy elektrónov v homogénnom magnetickom poli a množstvo ďalších.

Uvedomme si teda nasledovný fakt o dostredivej sile – dostredivá sila môže byť reprezentovaná ľubovoľnou silou. To, že nejakú silu nazveme dostredivou, len znamená, že:

1. Táto sila je stále kolmá na smer pohybu telesa.
2. Má práve veľkosť $m\omega^2 R$.
3. V dôsledku bodov 1., 2. spôsobuje pohyb telesa po kružnicovej trajektórii.

Aký je rozdiel medzi inerciálnymi a neinerciálnymi sústavami? Inerciálne sústavy sú také, v ktorých platia Newtonove pohybové zákony s nám známymi silami (gravitačná, elektromagnetická). Pre každú silu tu existuje pôsobiteľ, ktorý ňou pôsobí a môžeme ho hľadať pomocou zákona akcie a reakcie (ak ťa niekto tlačí vľavo, nájdi toho, kto je tlačený vpravo – možno je to on). *Všetky inerciálne sústavy sa vzájomne hýbu rovnomerne priamočiaro.*

V neinerciálnych sústavách potrebujeme pre opravenie fungovania Newtonových zákonov zaviesť imaginárne sily, ktoré pôsobia na telesá, no niet toho, kto by ich spôsoboval.

Prečo vlastne zavádzame imaginárne sily? Majme inerciálneho a egocentrického pozorovateľa A, v ktorého sústave je kameň s hmotnosťou m. Ak bude ťahať za šnúrku priviazanú ku kameňu silou F, podľa Newtona zákona bude táto sila spôsobovať zrýchlenie kameňa $a = F/m$.

Čo vidí pozorovateľ B, pohybujúci sa vzhľadom na pozorovateľa A nejakou konštantnou rýchlosťou? Uvidí teleso zrýchľovať rovnako veľkým zrýchlením ako pozorovateľ A. Z jeho pohľadu sa síce hýbe inou rýchlosťou, ale rýchlosť sa mu mení rovnako rýchlo.

Čo však pozorovateľ C, ktorý zrýchľuje vzhľadom na pozorovateľov A aj B so zrýchlením a_{C}? Akým veľkým zrýchlením bude zrýchľovať kameň vzhľadom na pozorovateľa C?

V sústave C bude zrýchlenie kameňa iné – zmení sa o a_{C}, teda o zrýchlenie sústavy C. Vidíte? Sila, akou pôsobí šnúrka na kameň, sa prechodom do inej sústavy nezmenila (máme tú istú šnúrku), no zmenilo sa zrýchlenie kameňa! Ak chceme, aby aj z pohľadu pozorovateľa C platil Newtonov zákon $F = m(a - a_{\mathrm{C}})$, musíme pri prechode do zrýchľujúcej sústavy pridať tzv. imaginárnu zotrvačnú silu $F_a = -ma_{\mathrm{C}}$.

Otáčajúce sa sústavy Podobnou úvahou by sme sa dostali aj k záveru, že pri presune do D (rovnomerne roztočíme vzťažné pravítka) musíme pridať odstredivú silu, ktorá pôsobí na úplne všetky telesá v tejto sústave. Bude mať veľkosť $F_{\text{odstreď}} = m\omega^2 R$, kde ω je uhlová rýchlosť nášho otáčania sa a R je vzdialenosť telesa od našej osi otáčania sa. Je dôležité uvedomiť si, že sa točíme my; teleso sa môže, no nemusí.

Podobnosť s dostredivou silou nie je čisto náhodná. Ako sme už vysvetlili vyššie – ak sa teleso v nerotujúcej sústave pohybuje po kružnici, pôsobí naň dostredivá sila. Ak sa naň pozrieme v rotujúcej vzťažnej sústave akurát tak rotujúcej, že v nej teleso stojí, všimneme si zaujímavé veci. Stále totiž na teleso pôsobí tá sila, ktorú sme nazývali dostredivou (gravitácia, šnúrka, ...) v inerciálnej sústave. Keďže sa však teleso v sústave rotujúcej práve rýchlosťou otáčania telesa nehýbe, musí byť pôvodná dostredivá sila kompenzovaná nejakou inou silou. A touto silou je práve odstredivá sila.

Okrem zotrvačnej sily a odstredivej sily existuje v rovnomerne otáčajúcej sa sústave ešte Coriolisova sila, ktorá pôsobí na telesá pohybujúce sa vzhľadom na sústavu.

Veľkosť Coriolisovej sily je $F_{\text{Coriolis}} = 2m\omega v \sin\alpha$, kde v je rýchlosť telesa a α uhol, ktorý zviera jeho rýchlosť s osou otáčania sústavy. Ak sa teleso hýbe v rovine otáčania (náš prípad), potom $\sin\alpha = 1$.

Jej smer je vždy kolmý na smer rýchlosti telesa (vzhľadom na neinerciálnu sústavu) a zároveň kolmý na smer vektora uhlovej rýchlosti neinerciálnej sústavy. Smer vektora uhlovej rýchlosti je von z hodín, ak sa teleso otáča protismeru hodinových ručiečiek, a do hodín, ak sa otáča v smere hodinových ručičiek. (Odvodenie by bolo trošku zložitejšie.)

Riešenie úlohy V čom je neinerciálnosť našej sústavy? Otáča sa uhlovou rýchlosťou ω. A ako sa v nej pohybuje puk? Každý jeho bod, ktorý je vo vzdialenosti r od stredu, sa v každom okamihu hýbe rýchlosťou $v = \omega r$ v smere dotyčnice ku kružnici v tomto bode.

Sila pôsobiaca na puk v neinerciálnej sústave otáčajúcej sa okolo stredu puku rýchlosťou ω teda bude:

$$F = F_{\text{Coriolis}} - F_{\text{odstreď}} = m\omega^2 r\,.$$

Ajhľaho, čo nám to vyšlo? Sila s veľkosťou a dokonca aj smerom dostredivej sily. Odstredivú silu vykompenzuje táto dostredivá sila a puk nemá najmenší dôvod na zmenu tvaru, či konzistencie.

K riešeniam Príklad bol dosť ťažký, o čom svedčí aj fakt, že hoci ste niektorí z vás správne napísali, že ak existuje odstredivá sila, musí existovať aj nejaká dostredivá sila, aby sa puk mohol otáčať, nikomu sa nepodarilo vymyslieť, akú silu reprezentuje táto dostredivá sila. Čo ma však dosť prekvapilo, viacerým z vás vyšiel záver, že puk sa roztrhne. V bežnom živote ale predsa nepozorujeme, že by sa pokojne stojaci puk len tak roztrhol! Nezabúdajte, ani veľkí fyzici, akí z vás určite čochvíľa budú, si nemôžu dovoliť ignorovať zdravý sedliacky rozum.

2.4 B3/A1 – Odpor (opravovali Marika a Petrík, vzorák Petrík)

Experimentálne určte koeficient Newtonovej odporovej sily:

$$F_{\text{o}} = \tfrac{1}{2} C \rho S v^2 \tag{1}$$

pre guľu a porovnajte ho s hodnotou uvádzanou v tabuľkách. Nezabudnite, že pre plný počet bodov treba experimenty opakovať (aspoň desaťkrát) a namerané údaje štatisticky spracovať, t. j. vypočítať ich aritmetický priemer a určiť jeho strednú kvadratickú odchýlku.

Na začiatok treba poznamenať očividný fakt s neočividnými dôsledkami, a to že správna hodnota koeficientu je vopred daná. Preto si treba dodefinovať (alebo skôr vyargumentovať) zopár základných pravidiel slušného správania. Pre veriacich – existuje jedenáste prikázanie: „Nebudeš fušovať merania.“ [3] Pre tých ateistickejšie a zároveň kariéristickejšie založených, fušovanie dát po objavení istého problému s gréckou ekonomikou [4] vyšlo z módy, a preto FKS tieto schopnosti u svojich riešiteľov nepodporuje.

Začnime teóriou. Čo teda musíme spraviť? To je teoreticky veľmi jednoduché [5] : predmet letiaci prostredím s hustotou ρ_0 po čase naberie určitú konštantnú rýchlosť, pretože odporová sila úmerná kvadrátu rýchlosti sa vyrovná sile tiažovej. Stačí púšťať predmety z ruky a sledovať, ako prestávajú zrýchľovať, a potom len stopnúť čas, zapísať výšku a vypočítať z rovnováhy síl koeficient aerodynamického odporu C:

$$mg = \frac{1}{2} C\rho_0 S v^2 ,$$

kde $S = \pi r^2$ je prierez telesa a ρ_0 hustota prostredia, ktorým teleso prechádza. Tá je pri 20 °C rovná 1,2 kg/ m^3. [6] Teda:

$$C = \frac{2mg}{\rho_0 \pi r^2 v^2} = \frac{2mgT^2}{\rho_0 \pi r^2 h^2} ,$$

kde rýchlosť $v = h/T$.

So far so good, prejdime k meraniam. Najskôr bolo treba nájsť vhodný predmet, a potom vhodné prostredie na odmeranie odporu, pričom tieto dve veci spolu dosť úzko súvisia. Vhodným predmetom určite nebude olovená gulička, lebo tá aj vo vode dosahuje dosť veľké, a teda ťažko merateľné rýchlosti. Rozumným objektom je napríklad plastová gulička padajúca vo vode alebo balón vo vzduchu.

Takisto si možno všimnúť, že odporová sila stúpa s druhou mocninou polomeru a tiažová s treťou. To znamená, že čím menší predmet, tým pomalšie bude zrýchľovať a tým skôr dosiahne konštantnú rýchlosť. Na druhej strane si treba dať pozor pri meraní polomeru – druhá mocnina vo vzorci naznačuje, že aj drobná chyba sa môže prejaviť výraznejšie, ako by nám bolo milé. Zvlášť v prípade balóna, ktorý má tendenciu deformovať sa pod vplyvom našich prstov, sa patrí odmerať obvod viackrát a získané hodnoty spriemerovať.

Ja som na meranie použil trochu vajcovitý, ktorý som našiel pohodený doma. Jeho polomer bol $(8{,}8 \pm 0{,}1)$ cm. Hmotnosť som odmeral tak, že som na mamkinu kuchynskú váhu s dielikom 1 g hodil 10 balónov (zamyslite sa, prečo vzduch vovnútri nehrá žiadnu úlohu). Vyhodila mi číslo 21, takže balón vážil $(2{,}1 \pm 0{,}1)$ gramu.

Odchýlku som spočítal takto:

$$\Delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_i (x_i - \bar{x})^2} .$$

Žiada si to krátke vysvetlenie. Prečo je pod odmocninou $n(n-1)$, a nie jednoducho len n? Dôvod je, že jediné jedno meranie je zaťažené nejakou odchýlkou σ_x. Takže keď spravím meraní n, odchýlka sa mi prirodzene musí znížiť, a dá sa dokázať, že sa znižuje úmerne s $1/\sqrt{n}$.

[3] *Fušovať* = vymýšľať tak, aby dávali správny výsledok.
[4] Pre záujemcov o literatúru odporúčam tento článok: `http://timharford.com/2011/09/look-out-for-no-1/`
[5] Ako hovorí klasik: „In theory, there is no difference between theory and practice. But in practice, there is.“
[6] Zdroj: `http://www.engineeringtoolbox.com/air-properties-d_156.html`

Balón som pustil najskôr z výšky zárubne: 187 cm. No zjavne mu bolo treba nechať nejakú dráhu na rozbehnutie, aby nabral svoju konštantnú rýchlosť. Tak som ho pustil od stropu (asi 2,5 m) a čas som začal merať, až keď balón dosiahol úroveň zárubne. Toto je moja tabuľka časov:

	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	Priemer
T [s]	1,14	1,16	1,08	1,22	1,14	1,08	1,11	1,04	1,20	1,16	1,17	1,14

Z týchto nameraných hodnôt a konštánt som spočítal koeficient C. Ako spočítať jeho odchýlku? Musíme do nej nejakým spôsobom vopchať odchýlky polomeru, hmotnosti a času pádu balóna. Všeobecné pravidlo znie, že odchýlky a hodnoty súčinu veličín je súčet pomerov odchýlky a chyby veličín. Okrem toho platí, že ak sa vo vzorci vyskytuje n-tá mocnina nejakej veličiny, tak odchýlka je n-krát väčšia.

Takže pre odchýlky v čase, polomere a hmotnosti dostávame takýto obludný výraz:

$$\frac{\Delta C}{C} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2}.$$

Skúste sa nad ním zamyslieť, intuitívne dáva zmysel. Sčítavame bezrozmerné čísla (pomery), presnejšie ich druhé mocniny – takmer ako v Pytagorovej vete – a čím väčšia mocnina veličiny vo výraze pre C, tým väčšiu váhu to celé má (preto je pred časom a polomerom dvojka).

Pre makačov, všeobecný algoritmus na počítanie celkovej odchýlky je cez derivácie (overte si, že to vedie na správny výsledok o tri riadky hore):

$$\Delta f(x_i) = f(x_i)\sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Delta x_i\right)^2}.$$

Takže $C = (0{,}522 \pm 0{,}039)$. Vzhľadom na oficiálnu hodnotu 0,47[7] to nie je zlé, keďže balón mal trochu sčapený tvar a na konci taký ten výrastok pre fúkanie vzduchu, ktorý mohol C trochu zvýšiť. Okrem toho som ešte mohol nechať balónu dlhšiu dráhu na rozbehnutie a ustálenie rýchlosti.

Ešte zopár teplých slov k riešeniam. Potešilo ma obrovské množstvo dobrých nápadov na predmety, ako napr. cherry rajčiny, ping-pongové loptičky naplnené vodou alebo polystyrénové guličky. Teóriu ste väčšinou trafili[8]. Horšie to bolo s meraniami, kde čas pádu bol v mnohých prípadoch príliš krátky, t. j. menej ako jedna sekunda. Je korektné merať na viac ako jedno desatinné číslo, a na druhej strane výsledok nezapisovať na viac ako tri. No a diskusia na konci, v ktorej vysvetľujete, kde presne mohli vzniknúť chyby merania, nemá byť „zoznamom všetkého, čo mi napadne“, ale jasne formulovanými bodmi, čo a ako v budúcnosti vylepšiť.[9] Česť práci!

[7]Zdroj je, ako inak, Wikipédia.

[8]Rada pre zopár expertov z GJH – integrovať také príšernosti ako pohyb telesa v odporovom prostredí FKS nikdy nežiada.

[9]Za všetky korektné komentáre uvediem jeden fakt trefný – trasúce sa ruky v podaní Jaroslava Petruchu. Poučenie je jasné – nepiť toľko kávy.

2.5 B4/A2 – Všetci skočia meter (opravoval Petrík)

Možno ste si všimli a možno nie, ale väčšina skokanov v našej prírode (bez ohľadu na svoju veľkosť) má schopnosť skočiť do podobnej výšky (človek meter, žaba dva, blcha a lúčny koník pol metra). Existuje pre túto podobnosť nejaké racionálne zdôvodnenie?

Začnime humorne. Pod „racionálnym zdôvodnením“ si nepredstavujeme „tie jedince, čo nevyskočia dosť vysoko, predátor zožerie, teda zostávajú len tí zdatnejši skokani“ (pozdravujem riešiteľa od Košíc) alebo „predátor mutuje takisto – tie, čo vyskočia vyššie, majú viac potravy a môžu sa rýchlejšie rozmnožovať“ (hádate správne – ide o toho istého autora). Tu sa nechce praktizovať biológia, ekonómia a iné vedy pracujúce s pojmami ako napr. *rozmnožovanie*, tu sa chce variť seriózna fyzika!

Takže na úvod trocha jednoduchej fyziky. Keď chcem vyskočiť, musím sa sa nejako odraziť od zeme tak, aby som nabral určitú rýchlosť v a s ňou kinetickú energiu $mv^2/2$, ktorá sa následne premení na potenciálnu mgh. Na to, aby som nabral rýchlosť v, musím vykonať určitú prácu, teda pôsobiť silou F po dráhe d.[10] Takže:

$$mgh = Fd\,,$$

$$h = \frac{1}{g}\frac{Fd}{m}\,.$$

Takže výška výskoku závisí od sily, ktorou pôsobím, dráhy rozbehu a mojej hmotnosti. Teraz sa treba zhlboka zamyslieť a prísť na to, ako tieto tri veličiny spolu súvisia.

Zadefinujme si lineárny rozmer zvieraťa L, ktorý hovorí niečo o tom, aké je zviera dlhé, široké aj vysoké. Možno si to predstaviť napríklad tak, že ak by som mal zviera roztopiť (alebo rozsekať[11]), naliať (nasypať) do nejakej nádoby kockatého tvaru, tak táto nádoba by mala stranu L. Všetky zvieratá sú z veľkej časti zložené z vody, a preto majú veľmi podobnú hustotu, takže jediným parametrom rozhodujúcim o ich hmotnosti je ich rozmer L. Teda $m = \rho L^3$.

Sila F je vyvíjaná našimi svalmi. Svaly majú opäť raz všetky zvieratá približne rovnaké, rozdiel je len v ich množstve. Relevantným parametrom je ich prierez, ktorý je úmerný L^2. Je to v podstate ako s lanom – čím má väčší prierez, tým viac napínania znesie. To, čo ale znesie, nezávisí od jeho dĺžky![12] Takže sila je $F = \sigma L^2$, kde σ je konštanta vyjadrujúca akési napätie (a meraná, ako si pozorný čitateľ isto všimne, v Pascaloch) a závisiaca od vlastností svalových buniek.

No a d je dráha, na ktorej sa rozbiehame, teda napr. rozdiel mojej výšky v podrepe a vo vzpriamenej polohe,[13] čo je plus-mínus dĺžka našej nohy, a tá je úmerná prvej mocnine rozmeru L. Teda $d = CL$, kde C je nejaká konštanta určujúca mieru, do ktorej sú jednotlivé zvieratá schopné čupnúť si. V každom prípade, žiadne zviera nie je schopné čupnúť si 10-krát nižšie ako ostatné.

[10] Na integrovanie sa tu pre jednoduchosť vykašlime, tiažová sila je pri povrchu Zeme všade po dráhe prakticky rovnaká.

[11] Len ma tu prosím neprásknite nejakým grínpísákom, lebo by nemuseli pochopiť môj gedanken experiment, súdiac podľa posledného inteligentného vyjadrenia ich šéfky: „Ja elektrinu k svojmu životu nepotrebujem, ten televízor si kľudne pozriem aj pri sviečkach,“ a bolo by zle-nedobre!

[12] Jednoducho preto, lebo ťahová sila v lane nezávisí od jeho dĺžky.

[13] Veru tak, nikto ešte nevyskočil s rovnými nohami.

Takže:

$$h = \frac{\sigma C}{g\rho}\frac{L^2 \cdot L}{L^3} = \frac{\sigma C}{g\rho} = \text{konštanta}\,,$$

čo ale znamená, že výška výskoku je naprieč matičkou prírodou takmer-konštantná! Písmená σ, ρ a C sa v živočíšnej ríši neodlišujú viac ako o rád. Samozrejme, treba povedať, že niektoré zvieratá nie sú na skákanie zvyknuté alebo odkázané (ako napr. slon), a preto neskáču. Niektoré sú pre zmenu príliš ťažké na to, aby zniesli dopad na zem bez toho, aby sa im niečo nestalo (opäť raz slon).[14]

Pri menších zvieratách treba tiež počítať s odporom vzduchu. Odporová sila je podľa vzorca $C\rho_v S v^2/2$ úmerná L^2, zatiaľ čo tiažová, resp. normálová sú úmerné s L^3. Teda pre malé L odporová sila naberá na význame, čo vysvetľuje, prečo lúčny koník alebo blcha nedokáže vyskočiť tak vysoko ako človek. Lesu zdar!

2.6 A3 – Armageddon (opravoval Maťo)

Na Zem mieri obrovská snehová guľa. Nemáme na výber. Spúšťa sa projekt Armageddon. Guľu treba rozstreliť na dve polovice, ktoré tesne minú Zem (zdroj – film Armageddon). Tím ruských mužíkov nainštaluje do stredu gule cár bombu, stisnú rozbušku a dúfajú. Odhadnite (hore-dolu pár rádov) maximálnu veľkosť snehovej gule, pred ktorou nás dokážu ochrániť.

V našom odhade budeme predpokladať, že energia uvoľnená Cár bombou sa minie na:

1. Rozdelenie gule na dve polovice, teda na popretrhávanie väzieb medzi všetkými molekulami ľadu, ktoré sa nachádzajú v jednom priereze gule.
2. Odparenie menšej gule snehu okolo bomby.
3. Rozídenie sa dvoch pologúľ do vzdialenosti $2R_Z \approx 12\,000$ km.

Hustota ľadu je asi $9\,000\ \mathrm{kg/m^3}$. Hmotnosť molekuly vody je približne $3 \cdot 10^{-26}$ kg. Z toho dostanem počet molekúl na ploche metra štvorcového – približne 10^{19}. To je zároveň aj počet molekúl, medzi ktorými musíme popretŕhať vodíkové väzby, aby sme mohli od seba dve pologule oddeliť. Energia jednej vodíkovej väzby je rádovo 10^{-19} J.[15] Teda energia potrebná na oddelenie molekúl vody na rozhraní plochy s obsahom 1 $\mathrm{m^2}$ je rádovo v jednotkách joulov.

Potenciálna energia pologúľ s polomerom R_g vo vzdialenosti $2R_Z$ bude určite menšia ako E_p dvoch gúľ s polomerom R_g a polovičnou hmotnosťou pôvodnej gule. Teda horný odhad energie, ktorá sa spotrebuje na vzdialenie pologúľ, je:

$$E_p = \kappa\,\frac{mm/4}{2\,R_Z} = \kappa\,\frac{mm}{16\,R_Z} = \kappa\,\frac{10\,\rho_{\text{vody}}^2 r_{\text{met}}^6}{16\,R_Z}\,,$$

kde m je hmotnosť pôvodnej gule.

Podľa Wikipédie je energia Cár bomby asi 10^{17} J. Skúsme predpokladať, že energia potrebná na odparenie vody bude oproti E_p zanedbateľná. Potom by podľa nášho odhadu pre E_p vyšiel polomer zhruba 20 km.

[14]Zdroj: `http://answers.yahoo.com/question/index?qid=20080606014106AANawEM`

[15]Všimnite si, že pri počte molekúl v kocke vody približne 10^{28} táto energia rádovo korešponduje so skupenským teplom vyparovania, ktoré je $10^6\ \mathrm{J \cdot kg^{-1}}$.

Energia sa ešte môže spotrebovať na zohriatie a odparenie vody v okolí bomby. Na Wiki si však môžeme nájsť, že ak bomba vybuchla vo vzduchu, ohnivá guľa mala okolo 4 km. Ak by to bolo v snehu rádovo do 1 km, pri skupenskom teple vyparovania 10^6 J, vyjde energia potrebná na odparenie tejto gule stále o jeden-dva rády menej než je energia bomby. Energia potrebná na zohriatie vody o 100 °C a roztopenie snehu je ešte o rád menšia. Energia potrebná na oddelenie dvoch vrstiev molekúl vody pozdĺž celého prierezu je pri takomto polomere približne 10^9 J, čiže vidíme, že naše zanedbanie iných energií voči potenciálnej bolo oprávnené.

2.7 A4 – Šošovka (opravoval Samo)

Samo sa rozhodol vyrobiť si papierovú šošovku na zapaľovanie ohňa. Šošovka pozostáva z tmavého kruhu papiera, v ktorom sú vyrezané sústredné kružnice – prvá diera je v strede. Samo zasvieti na kruh rovnobežnými lúčmi zeleného svetla vlnovej dĺžky $\lambda = 500\ \mathrm{nm}$ a očakáva, že presne oproti stredu šošovky vo vzdialenosti L (oveľa väčšej ako polomer šošovky) dosiahne nejakú intenzitu svetla. Samova myšlienka spočíva v tom, že ak budú zárezy rozmiestnené tak, že budú všetky spolu konštruktívne interferovať, mohlo by sa mu podariť dosiahnuť fakt veľkú intenzitu svetla. Vypočítajte, v akých vzdialenostiach a ako hrubé majú byť jednotlivé výrezy. Výsledky, ak to bude možné, zjednodušte pomocou Taylorovho rozvoja do prvého rádu. Potrebné vzorčeky nájdete na Wikipédii (anglickej).

Chcem získať čo najväčšiu intenzitu v strede plátna. Urobím do šošovky sústredné diery (rozumej sklo zamaľujem na čierno tam, kde diery nechcem) a budem sa pozerať, ako mi svetlo cez ne prechádzajúce interferuje.

Lúč prechádzajúci bodom vo vzdialenosti r od stredu šošovky prekoná vzdialenosť $\sqrt{L^2 + r^2}$, ak sa Pytagoras nemýlil. Pre $L \gg r$ to vieme zjednodušiť na:

$$L + \frac{r^2}{2L}\,.$$

Ak bude otvor začínať vo vzdialenosti r_1 a končiť vo vzdialenosti r_2, bude fázový rozdiel prvého a posledného lúča:

$$\frac{\pi}{L\lambda}(r_2^2 - r_1^2)\,.$$

Nepohrdnem žiadnymi lúčmi, ktoré budú ochotné spolupracovať. Lúče môžu mať rôzne fázy z intervalu šírky 2π (module perióda 2π). Ak si zvolím žiadanú výslednú fázu, napríklad 0, niektoré lúče k nej prispievajú nezápornou zložkou. Sú to lúče z intervalu $[-\pi;\pi]$. Teda sa mi oplatí brať interval fáz široký π.

Preto spravím zárezy nasledovne:

$$r_n = \sqrt{nL\lambda}\,,$$

kde diera je medzi r_{2i} a r_{2i+1}.

Výsledková listina po 2. kole letnej časti 2011/2012

A

	Meno	Škola	3	4	5	6	♡	Σ_2	Σ
1	Patrik Švančara	G Ľ. Štúra Trenčín	5	9	5	5	0	24,00	54,00
2	Dušan Kavický	G GJH	7	9	3	8	0	27,00	53,00
3	Peter Kosec	G Ľ. Štúra Trenčín	9	8	6	3	0	26,00	50,00
4	Matej Badin	G GJH	6	3	2	9	0	20,00	46,00
5	Jaroslav Petrucha	G Metodova	6	9	2		0	17,00	42,00
6	Klára Ficková	G Poštová	4	9	0		0	13,00	41,00
7	Branislav Rabatin	G GJH	6	6	3	5	0	20,00	40,00
7	Natália Tokárová	ŠPMNDAG		8	5	6	0	19,00	40,00
9	Eduard Batmendijn	CGSM		9			0	9,00	37,00
10	Juraj Surovčík	G P.O.H.	2	9	5		0	16,00	35,00
11	Karolína Šromeková	G Tatarku	7	4			0	11,00	33,00
12	Vladimír Macko	GĽŠ Zvolen	2	9	4	1	0	16,00	32,00
12	Miroslav Gašparek	SGOCZA	6	6			0	12,00	32,00
12	Jakub Cimerman	GJGT	4	6	4		0	14,00	32,00
15	Alžbeta Kurdelová	ŠPMNDAG	7	9	2		0	18,00	30,00
16	Róbert Lexmann	G Ľ. Štúra Trenčín	7	6	5		0	18,00	29,00
17	Irena Bačinská	G Lipany	5	0	3	0	0	8,00	27,00
18	Patrik Turzák	G Poštová					0	0,00	26,00
19	Magdaléna Reháková	GFGL	8	0	5		0	13,00	24,00
20	Michal Hledík	G GJH		9	5	9	0	23,00	23,00
21	Milan Pešta	G K Prešov					0	0,00	22,00
22	Peter Dupej	G GJH					0	0,00	21,00
23	Radomír Gajdošoci	GPH					0	0,00	17,00
24	Tomáš Gonda	Gamča					0	0,00	16,00
25	Matej Oravec	OG Varšavská	3	0			0	3,00	15,00
26	Matúš Jenča	G GJH			3		0	3,00	14,00
27	Klaudia Mráziková	G Ľ. Štúra Trenčín					0	0,00	13,00
27	Marek Koščo	OG Varšavská	5	0			0	5,00	13,00
29	Jerguš Greššák	ŠPMNDAG					0	0,00	12,00
30	Andrej Vlček	EGJT LM					0	0,00	11,00
30	Tomáš Turlík	G JAR		6			0	6,00	11,00
32	Michal Bock	Gamča					0	0,00	9,00
33	Jerguš Stručka	ŠPMNDAG					0	0,00	7,00
34	Jozef Bucko	ZŠ H. Otrokovce					0	0,00	6,00
34	Milan Smolík	G GJH					0	0,00	6,00
34	Samuel Tomašec	OG Varšavská	1	0			0	1,00	6,00
37	Veronika Melošová	GJCh BR					0	0,00	0,00

B

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ_2	Σ
1	Matej Badin	G GJH		9	2	6	3	0	20,00	54,00
2	Barbora Klembarová	OG Kukučínova		9	2	7	9	0	27,00	52,00
3	Karolína Šromeková	G Tatarku		9	2	7	4	0	22,00	51,00
4	Samuel Sučík	G GJH		8	0	4	6	0	18,00	49,00
4	Miroslav Gašparek	SGOCZA		7	9	6	6	0	28,00	49,00
6	Mário Lipovský	G GJH		8		7	9	0	24,00	48,00
7	Samuel Kočiščák	G Poštová		9	2	8	6	0	25,00	46,00
8	Jakub Bahyl	OG Varšavská	9	9	0	8	0	0	26,00	44,00
9	Marek Koščo	OG Varšavská	9	9	0	5	0	0	23,00	39,00
9	Martin Adamec	GJGT	4	9	0		6	0	19,00	39,00
11	Mark Daniel	GyPar	6	8	0		6	0	20,00	36,00
12	Michal Smolík	Gamča		4	9		6	0	19,00	35,00

	Meno	Škola	1	2	3	4	5	♡	Σ_2	Σ
12	Magdaléna Reháková	GFGL	4	2	9	8	0	0	23,00	35,00
14	Patrik Turzák	G Poštová						0	0,00	33,00
15	Martin Vozár	G GJH	9	9	0		2	0	20,00	32,00
15	Zuzana Magyarová	G GBST	6	6	9			0	21,00	32,00
17	Katarína Kmeťová	OG Kukučínova		9	0			0	9,00	30,00
18	Tomáš Turlík	G JAR	4	9			6	0	19,00	28,00
18	Pavol Olexa	GAB	9	6	0	6		0	21,00	28,00
20	Matej Oravec	OG Varšavská	1	8	0	3	0	0	12,00	27,00
21	Norbert Slivka	GJGT	9	9			6	0	24,00	24,00
22	Samuel Tomašec	OG Varšavská	9	7	0	1	0	0	17,00	23,00
22	Tomáš Kello	G JAR		6	0	2	5	0	13,00	23,00
24	Ján Šubjak	G P.O.H.		6	0	0	9	0	15,00	21,00
25	Marek Šuppa	GsvCaM		3	0	4		0	7,00	20,00
26	Milan Mikuš	G Ľ. Štúra Trenčín		6	0	3	9	0	18,00	18,00
27	Marián Longa	ŠPMNDAG	1	6	0	1		0	8,00	17,00
28	Marek Bašista	GPH						0	0,00	16,00
28	Max Karel	G Bajkalská	7	9				0	16,00	16,00
30	Filip Ayazi	G Ľ. Štúra Trenčín						0	0,00	12,00
31	Jaroslav Hofierka	G JAR		6				0	6,00	11,00
32	Michaela Šandalová	ŠPMNDAG						0	0,00	10,00
33	Dominika Iždinská	G GJH						0	0,00	9,00
34	Klaudia Mráziková	G Ľ. Štúra Trenčín						0	0,00	7,00
34	Jozef Bucko	ZŠ H. Otrokovce						0	0,00	7,00
34	František Dráček	ZŠ D. Mariková						0	0,00	7,00
37	Jerguš Stručka	ŠPMNDAG						0	0,00	5,00
37	Barbora Kováčová	ŠPMNDAG						0	0,00	5,00
37	Stela Pavlíková	G Ľ. Štúra Trenčín						0	0,00	5,00
40	Vincent Bašista	GPH						0	0,00	3,00