Fyzikálny korešpondenčný seminár
27. ročník, 2011/2012
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2011/2012

3.1 B0 – Balón (opravovala Aďa, vzorák Samo)

Pekná nádoba je vzduchotesne uzavretá a vzduchotesne rozdelená prepážkou na dve časti. V prepážke je vyrezaný kruhový otvor a v ňom strčený presne nafúknutý balón tvaru **dokonalej gule**. Balón je presne jednou polguľou v jednej komore a druhou v druhej a k prepážke vzduchotesne prilepený, obe komory nádoby sú teda vzduchotesne vzduchotesné. Do jednej z nich teraz pričerpávame vzduch. Popíšte a nakreslite, ako sa počas toho mení tvar balóna. Ako by sa menil tvar balóna, keby sme, naopak, z jednej komory vzduch odčerpávali? Úlohu stačí riešiť kvalitatívne (netreba počítať, stačí kresliť).

Ujasnime si, aké všetky sily pôsobia na balón. Sú to:

Tiažová sila – tú zanedbáme, balón je ľahký.

Tlakové sily od ľavej a pravej časti nádoby – tie pôsobia kolmo na povrch balóna.

Tlaková sila od vzduchu v balóne – tiež pôsobí kolmo na povrch balóna.

Napäťová sila v gume – taktiež pôsobí kolmo na povrch balóna.

V rovnováhe sa musia všetky tieto sily vykompenzovať, a nakoľko je vnútri balóna všade konštantný tlak, musí platiť rovnica:[1]

$$p_{\mathrm{ľ}} - \sigma_{\mathrm{ľ}} = p_{\mathrm{vnútri}} = p_{\mathrm{p}} - \sigma_{\mathrm{p}}\,,$$

kde $p_{\mathrm{ľ}}$, p_{p} sú tlaky vzduchu v ľavej a pravej časti nádoby a $\sigma_{\mathrm{ľ}}$, σ_{p} sú napätia v balónovej gume v ľavej a pravej časti balóna.

Toto by nám malo pripomenúť rovnicu pre obyčajný homogénny balón:

$$P_{\mathrm{vonku}} - \sigma = P_{\mathrm{vnútri}}\,.$$

A ako vieme, obyčajný homogénny balón[2] máva guľatý tvar. Náš balón nemusí mať úplne guľový tvar, lebo je prilepený v prepážke a ľavá polovica balóna necíti vplyv pravej inak, ako vnútorným tlakom. No obe polovice balóna musia mať tvar časti gule.

Než začneme prečerpávať vzduch v komorách, balón bude mať guľový tvar, obe polovice budú pologule. Ak teraz do jednej komory pričerpáme vzduch, tlak v nej stúpne a musí byť kompenzovaný tlakom vnútri balóna. Balón sa teda stlačí a tlak vnútri musí vzrásť. Ten však

[1] Rovnica popisuje sily pôsobiace na maličkú plôšku ΔS na povrchu balóna. Nakoľko tlaková sila má vyjadrenie $p\,\Delta S$ a všetky ΔS môžeme z rovnice vykrátiť, uvádzame hneď rovnicu pre tlaky.

[2] Bežné balóny majú rôzne hrúbky gumy v rôznych miestach, preto nie sú guľaté.

Seminár podporujú:

musí zostať v rovnováhe aj s ľavou časťou nádoby, tým smerom sa preto balón bude chcieť vydúvať. V rovnováhe sa ustáli stav, kedy je balón tvorený dvoma nerovnakými časťami gule zlepenými dokopy, ľavou väčšou ako pravou. Dokopy však tvar celého balónu už guľa nie je, skôr taký divný snehuliak; jeho celkový objem musí byť menší, ako objem pôvodného balóna (tlak vnútri musí vzrásť).

Ak budeme pumpovať vzduch ďalej, v pravej časti sa vypuklina postupne zmení na rovnú plochu, neskôr na dutinu, kým v ľavej sa bude vydúvať viac a viac.

Ak by sme, naopak, namiesto pumpovania vzduch vysávali, bude sa diať podobný proces, len na opačné strany a celkový objem balóna nebude klesať, ale rásť.

3.2 B1 – Vláčik (opravovala Marika, vzorák Ado)

V rade za sebou stojí k navzájom pevne pospájaných vláčikových vagónov s hmotnosťami $m_1, \ldots, m_k$. Jurko sa s vláčikom zahráva a začne prvý vagón ťahať konštantnou silou veľkosti F. Akými silami na seba budú navzájom pôsobiť jednotlivé vagóny?

Jurko ťahá prvý vagón s hmotnosťou m_1 konštantnou silou F. Pretože vagóny sú navzájom pevne pospájané, vláčik je sťa z kusa kameňa a každý vagón bude podliehať zrýchleniu a. Toto zrýchlenie vieme okamžite vyjadriť zo zákona sily vlasatého Newtona, keď sa na celý vláčik pozrieme ako na jedno teleso s hmotnosťou $(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)$:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k} \,.$$

Akou silou $F_{i,i+1}$, kde $i = 1, 2, \ldots, (k-1)$, budú na seba navzájom pôsobiť i-ty a $(i+1)$-ty vagón? Odpoveď znie: takou, aby i-ty vagón udelil celému zvyšku vláčika (t. j. vagónom č. $(i+1)$, $(i+2)$, …, k) zrýchlenie a. Zvyšok vláčika má celkovú hmotnosť $(m_{i+1} + m_{i+2} + \cdots + m_k)$, a preto:

$$F_{i,i+1} = (m_{i+1} + m_{i+2} + \cdots + m_k)\, a \,.$$

Po dosadení zrýchlenia z prvej rovnice dostávame:

$$F_{i,i+1} = F\, \frac{m_{i+1} + m_{i+2} + \cdots + m_k}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k} \,.$$

A to sa dá napokon prepísať nasledovne:

$$F_{i,i+1} = F \left(1 - \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_i}{m_1 + m_2 + \cdots + m_k} \right) \,.$$

Pre tých, ktorí sa neboja symbolu matematickej sumy, výsledok sa dá elegantne zapísať aj v nasledujúcom ekvivalentnom tvare:

$$F_{i,i+1} = F \left(1 - \frac{\sum_{n=1}^{i} m_n}{\sum_{n=1}^{k} m_n} \right) \,.$$

Na záver stojí za povšimnutie špeciálny prípad, kedy sú hmotnosti všetkých vagónov rovnaké, a teda $m_n = m$ pre všetky $n = 1, 2, \ldots, k$:

$$F_{i,i+1} = F \left(1 - \frac{im}{km} \right) = F \left(1 - \frac{i}{k} \right) \,.$$

Sila medzi dvoma susednými vagónmi teda v takomto prípade lineárne klesá – u každého ďalšieho vagóna sa zmenší o hodnotu F/k.

3.3 B2 – Striekanie (opravoval Maťo Ch)

Naplňte fľašku vodou. Spravte do nej dierky a odmerajte, ako závisí vzdialenosť dostreku od výšky dierky od dna.

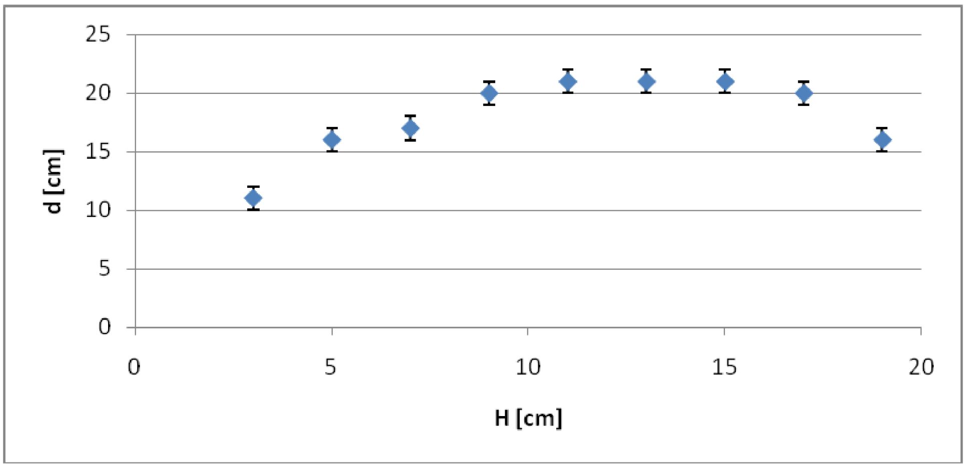
Pre výpočet vzdialenosti x v závislosti od výšky h hladiny nad dierkou a H výšky dierky nad podložkou, na ktorú strieka, sa dá použitím Berunoulliho rovnice a vzorcov pre šikmý vrh odvodiť vzťah:

$$x = 2\sqrt{hH}\,.$$

Všimnite si, že tento vzťah nezávisí od tiažového zrýchlenia. Prečo?

Keďže v zadaní nebolo napísané, že musíte tento vzťah teoreticky odvodiť, nestrhával som body, ak ste tak nespravili. Ak ste si však nevšimli, že voda najďalej dostrekne, keď zvolíme dierku v takej výške, aby nebolo ani h ani H maximálne, body som strhol, lebo tento fakt sa dá pozorovať aj experimentálne. Bolo dobré spraviť meranie s viacerými fľašami. Odstránila by sa tak chyba pri robení dierok. Keďže ste však nikto meranie nezopakovali, body som za to nestrhával. Tiež sa vyžadovalo, aby ste to skúsili zmerať aspoň pre 5 dierok. 2 body som tiež strhával za slabý alebo žiadny popis presnosti merania. Bolo treba napísať, s akou presnosťou ste merali dĺžku dostreku. Voda sa totiž pri dopade rozstrekuje a určite to nemeriate s presnosťou 1 mm tak, ako ste niektorí písali.

Na záver prikladám experimentálne výsledky Mária Lipovského, výška hladiny bola 24 cm.



Obr. 1: Dostreky

3.4 B3/A1 – Opadané lístie (opravovala Kamila, vzorák Marcelka)

Ako sa na jeseň zmení perióda rotácie Zeme okolo svojej osi v dôsledku opadania listov z listnatých stromov?

Zmena periódy rotácie súvisí so zmenou momentu zotrvačnosti Zeme. Platí, že celkový moment hybnosti Zeme $L = I\omega$ sa zachováva. Keďže padanie lístia zmenšuje moment zotrvačnosti Zeme

I, uhlová rýchlosť Zeme ω každú jeseň trošku narastie (a na jar, s príchodom nového lístia, sa zasa zmenší).[3]

Zachovanie momentu hybnosti Zeme vyjadruje nasledovná rovnica:

$$L = \omega_l I_l = \omega_z I_z \,,$$

kde indexy l, z označujú hodnoty príslušných veličín v lete a v zime. Keďže nás zaujíma zmena periódy, a nie uhlovej rýchlosti, rovnicu prepíšeme pomocou vzťahu medzi uhlovou rýchlosťou a periódou $\omega = 2\pi/T$:

$$L = \frac{2\pi}{T_l} I_l = \frac{2\pi}{T_z} I_z \,.$$

Označme $\Delta T = T_z - T_l$ a $\Delta I = I_z - I_l$. Drobnými úpravami dostaneme rovnicu pre zmenu periódy ΔT:

$$\Delta T = \frac{\Delta I}{I_l} T_l \,.$$

Aby sme mohli zmenu periódy vyčísliť, musíme odhadnúť relatívnu zmenu momentu zotrvačnosti $\Delta I/I_l$. Začnime zmenou momentu zotrvačnosti ΔI, čo je vlastne zmena momentu zotrvačnosti lístia vzhľadom na os rotácie Zeme:

$$\Delta I = m\,(R\cos\alpha)^2 - m\,[(R+h)\cos\alpha]^2 \approx -2mRh\cos^2\alpha \,.$$

m je celková hmotnosť lístia, α je zemepisná šírka výskytu opadavých stromov, R je polomer Zeme a h je výška, z ktorej listy opadávajú na zem. V druhej rovnosti sme zanedbali člen $mh^2\cos^2\alpha$, keďže $h \ll R$.

S pomocou internetu sa dá celkom ľahko dopracovať napríklad k nasledovným informáciám:

- Opadavé stromy sa nachádzajú najmä na severnej pologuli v miernom pásme (teda cca. na 45° zemepisnej šírky). Mapku výskytu opadavých listnatých lesov si môžete pozrieť na nižšie uvedenom obrázku.
- Priemerný opadavý listnatý strom vyprodukuje za rok zhruba 30 kg lístia.
- Jeden hektár priemerného listnatého lesa v miernom pásme obsahuje cca. 1 000 stromov.
- Priemerná výška opadavého stromu je okolo 20 – 30 m.

Obr. 2: Opadavé listnaté lesy

[3] O niečo známejší príklad tohto istého javu je krasokorčuliar, ktorý sa vrtí na mieste s rozpaženými rukami. Keď ruky pripaží, začne sa vrtieť rýchlejšie.

Pomocou obrázku a informácií o rozlohe Európy, Ázie a Severnej Ameriky sa dá odhadnúť celková plocha opadavých lesov na zhruba $10^7\ \mathrm{km}^2 = 10^9$ ha. Hmotnosť lístia, ktorú vyprodukuje jeden hektár lesa (cca. 1 000 stromov) je $1\,000 \cdot 30\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{ha}^{-1}$. Za jednu jeseň teda opadne $10^9\ \mathrm{ha} \cdot 3 \cdot 10^4\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{ha}^{-1} = 3 \cdot 10^{13}$ kg lístia.

Po dosadení hodnôt $m \approx 3 \cdot 10^{13}$ kg, $h \approx 25$ m, $R \approx 6\,378$ km a $\alpha \approx 45^\circ$ do rovnice pre zmenu momentu zotrvačnosti dostaneme:

$$\Delta I \approx -4{,}8 \cdot 10^{21}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \,.$$

Celkový moment zotrvačnosti Zeme je:

$$I = \frac{2}{5} M R^2 \,,$$

kde $M \approx 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg a $R \approx 6\,378$ km. Po dosadení dostávame:

$$I \approx 9{,}7 \cdot 10^{37}\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \,.$$

Relatívna zmena hmotnosti momentu zotrvačnosti Zeme je teda:

$$\frac{\Delta I}{I_1} = \frac{-4{,}8 \cdot 10^{21}}{9{,}7 \cdot 10^{37}} \approx -5 \cdot 10^{-17} \,.$$

Túto hodnotu dosadíme spolu s hodnotou periódy rotácie Zeme $T_1 \approx 24\ \mathrm{h} = 86\,400$ s do rovnice pre zmenu tejto periódy:

$$\Delta T \approx -5 \cdot 10^{-17} \cdot 86\,400\ \mathrm{s} \approx -4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{s} = -4\ \mathrm{ps} \,.$$

Najmä údaje o hmotnosti lístia a jeho zemepisnej šírke sú veľmi približné a môžu sa od skutočných líšiť aj s faktorom 5. Výsledok nám však dáva dobrú predstavu o rádoch výsledku, t. j. či ide o pikosekundy, milisekundy alebo minúty.

Zdroje:

http://en.wikipedia.org/wiki/Earth
http://www.wisconsincountyforests.com/qa-forst.htm
http://www.zadania-seminarky.sk/prezentacia/biom-opadave-listnate-lesy/36744
http://nhsforest.org/how-many-trees-can-be-planted-hectare
http://sk.wikipedia.org/wiki/Zmiešaný_les

3.5 B4/A2 – Strecha (opravovala Tinka, vzorák Maťo Ch)

Na naklonenej rovine so sklonom 30° (krásny model strechy) je položený štvorcový medený plech s dĺžkou hrany $l = 1$ m, hmotnosťou $m = 8$ kg a s vodorovnou dolnou a hornou hranou. Každý deň sa plech rozpáli na teplotu vriacej vody a v noci zas schladí na teplotu mrznúcej vody. Odhadnite, o koľko sa v dôsledku toho plech posunie za jedny letné prázdniny smerom nadol. Koeficient rozťažnosti je $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$, koeficient trenia medzi plechom a strechou $f = 1$ a strecha sa teplom nerozťahuje.

Nestihneme ani vziať pero do ruky a načmárať pár rovníc, a už sa nás pýta naše svedomie: „Prečo sa plech vôbec začne zosúvať dole strechou, keď je trenie väčšie než tangens uhla α?“

Odpovieme nebojácne: „Tak mu treba! Keby tíško sedel, zostal by na mieste, on sa však stále mrví, rozťahuje a sťahuje, no a každý taký pohyb ho posunie o kúsok nižšie.“ Ak by sa plech rozťahoval na vodorovnej podložke, jeho stred by sa nehýbal a okraje by sa trochu vzďaľovali. Sklon strechy však spôsobuje, že stacionárny bod bude trochu vyššie a ťažisko sa bude posúvať dole. Sťahovať sa bude naopak okolo nižšieho bodu – ťažisko sa znova posunie dole a plech sa pohybuje skoro ako húsenica. (Na rozťahovanie plechu do bokov môžeme zabudnúť, lebo na pohyb dole strechou nemá žiaden vplyv.)

Po takejto úvahe sa s pokojným svedomím pustíme do výpočtov. Výšku stacionárneho bodu môžeme vypočítať energetickým prístupom (ako sa má plech rozťahovať aby minul najmenej energie?), metódou imaginárneho klinca (keby sme plech ku streche priklincovali presne v stacionárnom bode, nepôsobil by naňho žiadnou celkovou silou) alebo asi najjednoduchšie nasledovným spôsobom.

Nech je stacionárny bod vzdialený a od vrchného okraja platne. Pri rozťahovaní sa bude horný kus platne hmotnosti ma/l pohybovať nahor. Na podložku tlačí silou:

$$\frac{mga}{l}\cos\alpha\,,$$

preto naň pôsobí trecia sila:

$$F_a = fmg\frac{a}{l}\cos\alpha$$

smerom dole strechou. Dolný kus platne hmotnosti bm/l (kde $a + b = l$) sa posúva dole, preto naň pôsobí trecia sila:

$$F_b = fmg\frac{b}{l}\cos\alpha$$

smerom hore strechou. Tieto dve trecie sily musia vykompenzovať poslednú silu rovnobežnú so strechou (o rovnováhu kolmých zložiek sa postará strecha sama – nechcela by totiž, aby sa cez ňu platňa prebúrala), a to konkrétne zložku tiažovej sily veľkosti:

$$F_t = mg\sin\alpha\,.$$

Po krátkej kontemplácii o znamienkach dostávame rovnosť:

$$fmg\frac{b}{l}\cos\alpha - fmg\frac{a}{l}\cos\alpha = mg\sin\alpha\,,$$

$$b - a = l\,\mathrm{tg}\,\alpha/f\,.$$

Z tejto rovnosti vidíme, že $b > a$ (čiže stacionárny bod je nad stredom), cítiť z neho i galibu pri $\mathrm{tg}\,\alpha > f$ (čiže platňa sa šmýka dole). Stred platne je od stacionárneho bodu vzdialený o $d = (b - a)/2 = l\,\mathrm{tg}\,\alpha/(2f)$. Pri jednom roztiahnutí platne sa teda posunie nadol o:

$$\Delta x = d\alpha_{\mathrm{M}}\Delta T\,\mathrm{tg}\,\alpha/(2f)\,,$$

kde α_{M} sme označili koeficient rozťažnosti plechu a ΔT zmenu teploty v rámci jedného cyklu.

Situácia pri sťahovaní je veľmi podobná, až na to, že smery trecích síl, a teda ich znamienka vo finálnej rovnici sa zmenia na opačné. Dostaneme teda:

$$-fmg\frac{b}{l}\cos\alpha + fmg\frac{a}{l}\cos\alpha = mg\sin\alpha\,,$$

$$a - b = l \operatorname{tg} \alpha / f \,.$$

Stacionárny bod bude teda v rovnakej vzdialenosti od stredu platne, lenže pod ním. Pri jednom stiahnutí sa posunie o rovnaké Δx, a znovu nadol. Za jeden cyklus (jeden deň) sa teda posunie o:

$$2\Delta x = 1 \text{ mm} \,.$$

Na koniec ešte pár filozofických poznámok. V praxi môžu výsledok jemne zmeniť nerovnosti strechy, ktoré ovplyvňujú rozloženie síl na platňu, o niečo viac výkyvy teploty (nad strechou sa preženie mrak a máme o minicyklus navyše) a takisto rozťahovanie strechy samotnej.

V tomto prípade sa nám bude plech vzhľadom na strechu posúvať o niečo menej: ak je koeficient rozťažnosti strechy α_S, z hľadiska úlohy je to podobné, ako keby sa efektívny koeficient rozťažnosti plechu zmenšil na $(\alpha_\mathrm{M} - \alpha_\mathrm{S})$. Ak sa však strecha naozaj s teplom rozťahuje, oveľa viac ako osud plechu by nás asi trápil osud našej strechy, ktorá by sa tiež rada posúvala nadol. Táto záškodnícka snaha kovových striech je reálnym problémom – mäkké olovené strechy v minulosti doslova stekali z domov, obchádzajúc i klince, ktorými boli pribité!

3.6 A3 – Kocka (opravoval Bzdušo)

Kamila šla študovať fyziku len preto, aby sa dozvedela odpoveď na základnú otázku svojho života: „Akú hustotu musí mať homogénna kocka, aby plávala vo vode so spodnou a vrchnou stenou vodorovne?" A čo vy, poznáte odpoveď?

Pointou úlohy je preskúmať, pre aké hustoty kocky je zadaná poloha stabilná a pre aké labilná. Stabilná je vtedy, keď sa kocka po malom „drcnutí" vráti naspäť (ako guľôčka v jamke), pri labilnej polohe sa kocka začne ešte viacej pretáčať (ako guľôčka na kopci). Pri stabilnej polohe je podstatné, že kocka sa vráti späť pri *hocijakom* malom drcnutí (pri guľôčke v sedle nestačí preskúmať smer do kopca, ale aj smer z kopca).

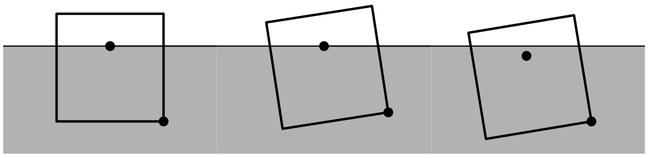
Na prvé zamyslenie žalostné. Spôsobov, ako drcnúť do kocky, je totiž *veľmi veľa*! Našťastie sa dajú šikovne kategorizovať. Napríklad drcnutia, ktoré kocku posunú vo vodorovnom smere, sú pre nás úplne nezaujímavé. Rovnako nezaujímavé sú aj vychýlenia v zvislom smere, lebo voči nim sú všetky plávajúce telesá stabilné. Dôkaz je jednoduchý: Na plávajúce teleso pôsobí nulová celková sila – vztlaková a tiažová sila sa navzájom vyrušia. Po malom zatlačení kocky do vody sa vztlaková sila (smerujúca nahor) zväčší a kocka sa začne hýbať späť smerom nahor. Naopak, pre malé vychýlenie smerom nahor vztlak *klesne* a kocka sa začne hýbať späť nadol. To je celé.[4] Tým sú všetky „posuvné drcnutia" vyriešené – zatiaľ nič zaujímavé.[5]

Omnoho zaujímavejšie sú *otočenia*. Konečne sa dostávame ku *gru* problému. Kocku možno v princípe otočiť okolo hocijakej osi. Na základe predošlého odseku však stačí uvažovať také (malé) otočenia, ktoré *nemenia objem ponorenej časti.* [6]

[4] Žiadna veľká veda. Napriek tomu poteší, že si človek dokáže fyzikálne odôvodniť aj takéto každodenné samozrejmosti.

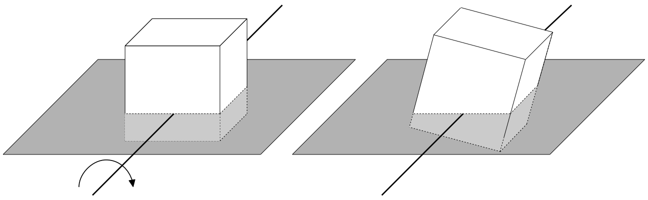
[5] Snáď ešte poznámka pod čiarou, na ktorú sa odvoláva hneď tá nasledujúca: Fakt, že kocka je stabilná voči malým zvislým vychýleniam, znamená, že pri nich *rastie* energia systému.

[6] Pretože podľa predošlej poznámky pod čiarou, otočenia meniace objem ponorenej časti *stoja viacej energie* ako ekvivalentné otočenia, ktoré ho nemenia. Ekvivalentným sa myslí, že kocka sa otočí o rovnaký uhol, ale po otočení skončí v inej výške. Príklad: Na nasledujúcom obrázku sú stredná aj pravá kocka otočeím ľavej o rovnaký uhol okolo *rôznych* bodov. Pri kocke vpravo sme zmenili objem ponorenej časi, preto je jej energia automaticky vyššia ako energia kocky na strednom obrázku, pri ktorom sme objem ponorenej časti zachovali. V našej úlohe stačí skúmať tie „stredné kocky".



Obr. 3: Šťucháme kocku (1)

To je zaiste významné zjednodušenie problému. *Zázračné* však je, že úplne stači preskúmať *jediné* otočenie – naznačené na nasledujúcom obrázku. Prečo je to tak, to je triková otázka a venujem jej jeden odsek v samom závere riešenia. Zatiaľ vezmime ako fakt, že naozaj stačí skúmať nasledovné „drcnutie“.



Obr. 4: Šťucháme kocku (2)

Pre voľne plávajúcú kocku platí Archimedov zákon:

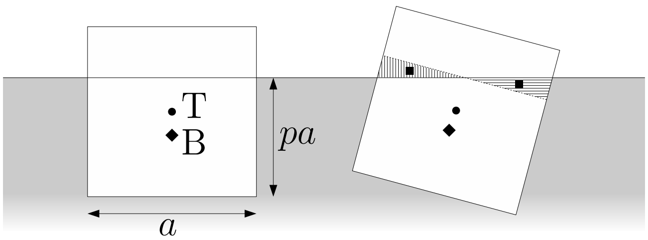
$$V_\mathrm{K}\rho_\mathrm{K}g = V_\mathrm{V}\rho_\mathrm{V}g \equiv F\,,$$

kde index K značí kocku a V vodu; V_V je objem ponorenej časti kocky. Táto rovnica sa ľahko upraví do tvaru:

$$\frac{V_\mathrm{V}}{V_\mathrm{K}} = \frac{\rho_\mathrm{K}}{\rho_\mathrm{V}} \equiv p\,.$$

Zavedené označenia F a p sa čochvíľa ukážu byť výhodné, nakoľko veľmi skrátia nasledujúce rovnice. Pre podiel p zrejme platí $0 < p < 1$, aby kocka bola zároveň hmotná (prvá nerovnosť) a plávala na vode (druhá nerovnosť).

No a už konečne kocku trochu vychýľme a zaujímajme sa, aké sily na ňu pôsobia teraz.



Obr. 5: Šťucháme kocku (3)

Pred výchýlením pôsobí v ťažisku kocky (T) tiažová sila a v ťažisku ponorenej časti[7] (B) vztlaková sila. Obe sily majú veľkosť F a ich účinky sa navzájom sa vyrušia. Po vychýlení o malý uhol α (pričom pre malé uhly môžeme veselo používať $\sin\alpha \approx \alpha \approx \operatorname{tg}\alpha$) sa ich veľkosti nezmenia, ale obe sily získajú rameno: $\alpha a\,(p - 1/2)$ pre tiaž a $\alpha pa/2$ pre vztlak.

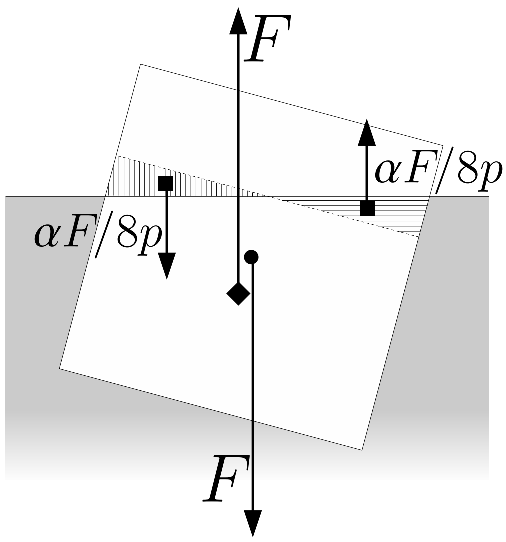
Po vychýlení však začne vztlak pôsobiť aj na vodorovne vyšrafovaný trojuholník. Jeho objem je:

$$V_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)\cdot a \approx \alpha\frac{V_\mathrm{K}}{8} = \alpha\frac{V_\mathrm{V}}{8p}\,,$$

čomu zodpovedá vztlaková sila:

$$F_1 = V_1\rho_\mathrm{V} g = \alpha\tfrac{F}{8p}\,.$$

Vzdialenosť ťažiska od osi otáčania je $a/3$. Ďalšou zmenou je, že na zvislo šrafovaný trojuholník vztlak pôsobiť *prestane*, čo si možno znázorniť silou *navyše* smerom *nadol.* Parametre tejto sily sú rovnaké, ako pri vodorovne vyšrafovanom trojuholníku.



Obr. 6: Šťucháme kocku (4)

Celkový moment sily pôsobiaci na kocku po vychýlení je (kladné znamienko sme zvolili pre smer momentu súhlasný s vychýlením):

$$M = \underbrace{+F\cdot\alpha\frac{ap}{2}}_{\text{vztlak na pôvodne ponorenú časť kocky}} \underbrace{-F\cdot\alpha a\left(p-\frac{1}{2}\right)}_{\text{tiaž}} \underbrace{-2\cdot\frac{\alpha F}{8p}\cdot\frac{a}{3}}_{\text{zmena vztlaku kvôli šrafovaným častiam kocky}}\,.$$

[7] Že prečo? Ľaľa dôkaz: Vztlaková sila vzniká ako súčet tlakových síl pôsobiacich na skúmané teleso cez jeho povrch. Predstavme si, že by sme celé skúmané teleso nahradili vodou – ale myšlienkovo si toto kvapalné teleso ponechali vydelené od zvyšku kvapaliny. Potom vztlaková sila pôsobiaca na toto vydelené kvapalné teleso je rovnaká ako keď tam bolo pôvodné teleso, lebo povrch ostal ten istý. To, čo sme však vytvorili je „voda vo vode“, t.j. systém, o ktorom vieme, že je stabilný (spontánne sa nezrýchľuje a neroztáča). To znamená, že vztlaková sila sa čo do veľkosti rovná tiaži vytlačenej vody a pôsobisko vztlakovej sily leží na zvislej priamke prechádzajúcej ťažiskom vytlačenej vody. Výber konkrétneho bodu na tejto priamke je ľubovoľný, fyzikálne nerozlíšiteľný.

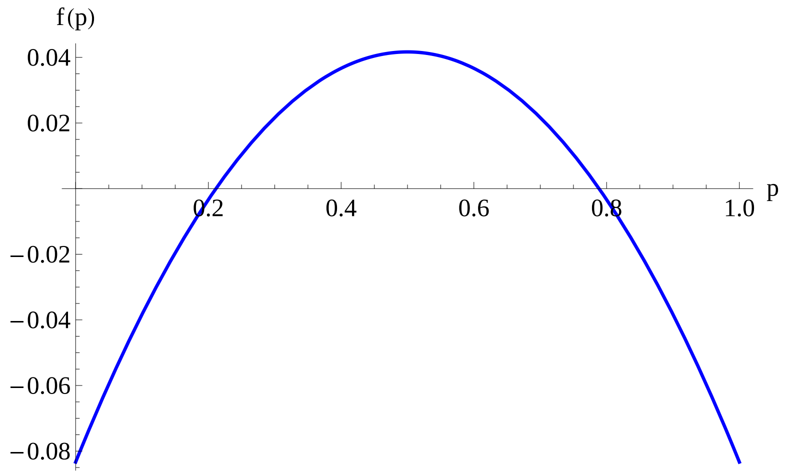
Ak sa má kocka vrátiť späť, musí platiť $M < 0$. Ak celú rovnicu podelíme výrazom $F\alpha a$, dostaneme:

$$\frac{p}{2} - \left(p - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{12p} < 0\,.$$

Ak uvážime, že p je kladné, nerovnica po vynásobení p-čkom neotočí znamienko. Naľavo dostaneme kvadratický výraz s riešením:

$$-\frac{1}{2}\left(p - \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\left(p - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) < 0\,.$$

Ľavú stranu nerovnice si vykreslíme na nasledovnom obrázku.



Obr. 7: Ľavá strana

Pri pohľade na graf sa ľahko presvedčíme, že pomer $p = \rho_\mathrm{K}/\rho_\mathrm{V}$ musí patriť do množiny:

$$p \in \left(0; \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}; 1\right) \approx (0; 0{,}211) \cup (0{,}789; 1)\ .$$

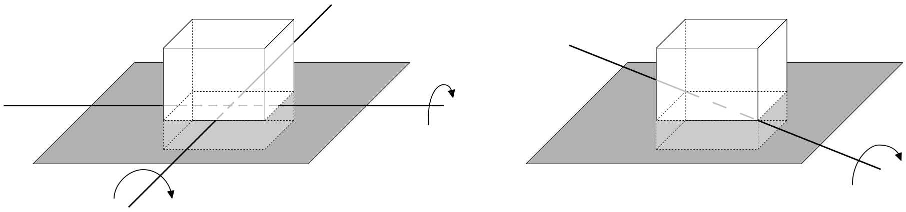
Problem solved.

Teraz ten „zázrak“: Prečo stačí skúmať toto vychýlenie? Za to môžeme byť vďační vysokej symetrii kocky.[8] Predstavte si, že by kocka na obrázku 5 bola mierne vychýlená aj „zozadu dopredu“. Potom, ak by sme nepočítali celkový moment sily M, ale iba jeho *zložku* v rovine papiera, dostali by sme pre stabilitu v rovine papiera *tú istú* podmienku ako pre M.[9] To je však veľmi, *naozaj veľmi* dobrá správa! Malé vychýlenia v jednej rovine spôsobujú moment sily otáčajúci *iba* v tejto rovine. Pre „predo-zadné“ vychýlenie ide prakticky o tú istú situáciu, takže v rovine tohto vychýlenia prídeme k tomu istému záveru. Avšak hocijaké malé vychýlenie

[8]Napr. pre kváder už takéto tvrdenie neplatí.

[9]Teda nie celkom – pri niektorých členoch by vystúpil $\cos\alpha$ v čitateli/menovateli navyše (nakreslite si obrázok a presvedčte sa sami). *Ale to vôbec nevadí!* Pre malé vychýlenia úplne stačí zaujímať sa o členy lineárne v α, a preto môžeme položiť $\cos\alpha \approx 1$.

si možno predstaviť ako zloženie dvoch vychýlení v týchto dvoch diskutovaných rovinách. Napríklad ak kocku v ľavom obrázku otočíme o malý uhol α okolo oboch naznačených osí, získame jej otočenie o $\alpha\sqrt{2}$ okolo osi naznačenej na pravom obrázku.



Obr. 8: Otáčame kocku

Každé malé otočenie si možno rozložiť na zloženie otočení okolo dvoch už preskúmaných osí. Pre kocku však každé z týchto dvoch vychýlení spôsobí iba moment sily v príslušnej rovine, vďaka čomu analýza vyššie stačí.

Finito. Pokiaľ niektorý krok z tohto vzoráku nebol dostatočne jasný, odporúčam pozrieť si aj vzorák úlohy 3.4 z minulého ročníka FKS. V nej bolo tiež treba preskúmať stabilitu plávajúceho telesa a niektoré časti riešenia možno autor podrobnejšie prediskutoval tam. Naopak – nadšencom, ktorých táto téma nadchla, odporúčam nájsť si v archíve FX zákusok FX6-1 so zmrzlinou.

3.7 A4 – Umelá gravitácia (opravoval Petrík)

Na ďalekú medzihviezdnu cestu sa vydala posádka vo vesmírnej lodi. Aby im neatrofovali svaly, na lodi funguje systém umelej gravitácie. Loď má tvar valca s polomerom $R = 1\ \mathrm{km}$ a posádka obýva vnútornú stranu jeho plášťa. Otáčaním lode sa simuluje gravitačné pole veľkosti $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Robo mal to šťastie, že ho vybrali na misiu, a teraz si šťastím bez seba hádže loptičky. V akej vzdialenosti od miesta vrhu (meranej po zakrivenej podlahe) dopadne loptička vyhodená z podlahy pod uhlom $45\,^\circ$ rýchlosťou $v = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$?

Príklad sa dal vyriešiť celkom jednoducho. Uhlová rýchlosť, akou sa loď otáča, je daná odstredivým zrýchlením $g = v^2/R = \omega^2 R$, číselne $\omega = 0{,}1\ \mathrm{rad/\,s}$. To znamená, že rýchlosť na povrchu lode, ktorú si označíme v_g, je $\omega R = 100\ \mathrm{m/\,s}$.

Po chvíli rozmýšľania možno dôjsť k poznaniu, že existuje sústava, v ktorej bude lopta letieť priamočiaro. Stačí si vystúpiť z lode a na celú situáciu sa pozerať zvonka. Zvoľme si súradnicovú sústavu tak, že Roberta postavíme do bodu nula a stred lode bude v bode $(0, R)$. Loď nech rotuje proti smeru hodinových ručičiek, a Robo nech hádže akoby „doprava“, teda v smere rotácie.

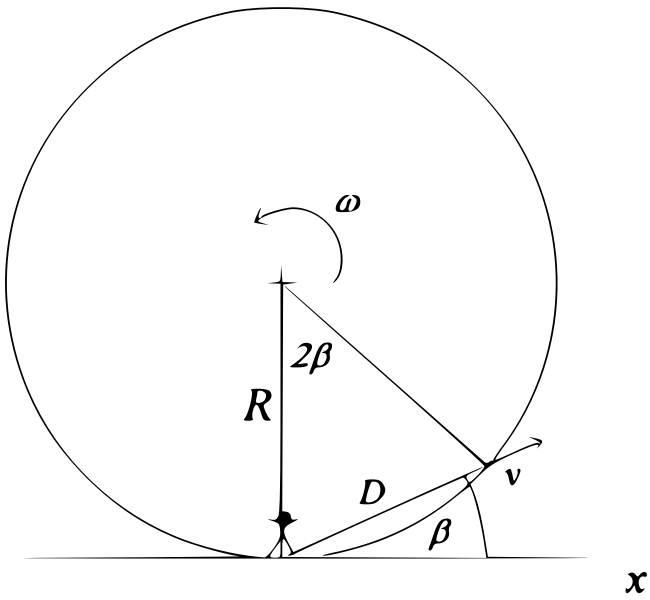
Zvonka vyzerá rýchlosť loptičky inak. Vertikálna zložka bude rovnaká ako vo vnútri, $v_y = v_0 \sin 45\,^\circ = v_0/\sqrt{2}$. Horizontálna však bude zvýšená o rýchlosť otáčania lode:

$$v_x = v_g + v_0 \cos 45\,^\circ = v_g + v_0/\sqrt{2}\,.$$

Uhol β medzi x-ovou osou a smerom pohybu lopty je:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0}{\sqrt{2}v_g + v_0}\,.$$

Možno si všimnúť, že čitateľ je len 10 m/ s, no menovateľ až 151 m/ s, takže môžeme smelo napísať $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$.[10]



Obr. 9: Vesmírna loď

A teraz trochu ľahkej matematiky – uhol medzi bodmi, kde priamka pohybu lopty pretína kružnicu, teda vesmírnu loď, je 2β, ako ukazuje obrázok. To znamená, že dráha, ktorú prejde lopta od vrhu po dopad na povrch lode, je $D = 2R\sin\beta \approx 2R\beta$, a čas, za ktorý dopadne, je $T = D/v$, kde v je veľkosť rýchlosti lopty:

$$v = \sqrt{(v_0\cos 45\,^\circ + v_g)^2 + (v_0\sin 45\,^\circ)^2} = \sqrt{v_0^2 + v_g^2 + \sqrt{2}v_0v_g}\,.$$

Za čas T sa sa loď otočí o uhol ωT, a teda celková uhlová vzdialenosť miesta vrhu a dopadu je rozdiel $2\beta - \omega T$. Takže v absolútnom meradle, napr. v metroch, to je:

$$\Delta R = (2\beta - \omega T)R = \left(2\beta - \frac{2R\omega\beta}{v}\right)R = 2\beta R\left(1 - \frac{R\omega}{v}\right).$$

Číselne to je 9 m.[11]

Ale pozor! Čo ak Robert pohŕda pravou stranou a orientuje sa doľava?[12] Čo ak hádže – z nášho pohľadu – proti pohybu lode? V tom prípade je horizontálna zložka rýchlosti $v_x = v_g - v_0/\sqrt{2}$, takže platí:[13]

$$\beta_- = \frac{v_0}{\sqrt{2}v_g - v_0}$$

[10] Kto neverí, nech si to hodí do kalkulačky. Uhol β je samozrejme vyjadrený v radiánoch.

[11] Pri písaní výsledku nezabúdajme, že viac ako tri desatinné miesta nemajú zmysel.

[12] Nie, táto veta naozaj na nič nenaráža.

[13] Stále si môžeme dovoliť priblíženie $\operatorname{tg}\beta \approx \beta$, pretože menovateľ je veľkých 131 m/ s.

a veľkosť rýchlosti je:

$$v_- = \sqrt{v_0^2 + v_g^2 - \sqrt{2}v_0 v_g}\,.$$

Teda:

$$\Delta R_- = (2\beta_- - \omega T)R = 2\beta_- R\left(1 - \frac{R\omega}{v_-}\right).$$

V tomto prípade je číselná hodnota $-11{,}1$ m, teda lopta dopadne (úplne pochopiteľne) naľavo od miesta vrhu.

otazky@fks.sk