Fyzikálny korešpondenčný seminár
27. ročník, 2011/2012
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

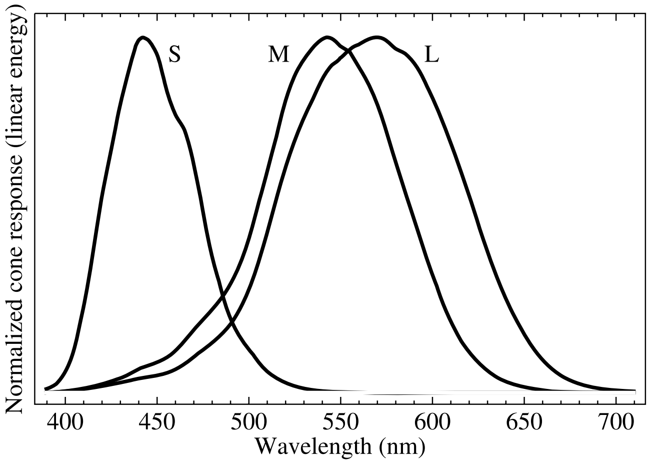
Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2011/2012

3.1 B0 – RGB (opravovala Marcelka)

Keď zmiešame svetlo modrej, zelenej a červenej farby, výsledkom je biela. Keď však to isté spravíme s pastelkami, bielu nedostaneme. Viete to vysvetliť?

Na úvod si povieme niečo o farbách. Je známy fakt, že svetlo je elektromagnetické vlnenie a od jeho vlnovej dĺžky závisí, akej farby sa nám svetlo javí. Ľudské oko vníma vlnové dĺžky od 390 nm (fialová) do 750 nm (červená). V tomto intervale vlnových dĺžok nájdeme všetky farby dúhy.

Ďalšou zaujímavou otázkou je, ako naše oko rozpoznáva rôzne farby. Na sietnici máme tri typy čapíkov citlivé na rôzne oblasti spektra. Zjednodušene by sme mohli povedať, že máme čapíky citlivé na modré, zelené a červené svetlo. V skutočnosti to ale neznamená, že napríklad „modré“ čapíky sú citlivé iba na svetlo s vlnovou dĺžkou prísluchajúcou modrej, ako môžete vidieť na obrázku.[1]



Obr. 1: Citlivosť čapíkov na rôzne vlnové dĺžky

Tieto čapíky sú najcitlivejšie na fialovú, a čím je vlnová dĺžka svetla ďalej od fialovej, tým menej dané svetlo „vybudí“ modré čapíky.

O tom, ako vnímame nejakú zmes farieb, rozhoduje len intenzita reakcie jednotlivých čapíkov. Zamyslite sa, že to nám umožňuje zvoliť si ľubovoľné tri farby a vyvolať pomocou ich zmesi ľubovoľný podnet v oku.

[1] Farebná verzia obrázku je dostupná na http://bit.ly/AgWKcR

Seminár podporujú:

Zmes zeleného, červeného a modrého svetla sa nám javí ako biele svetlo, no v skutočnosti je to iná biela, ako biela farba snehu. Keď sa pozeráme na sneh, vidíme zmes všetkých farieb dúhy. Všimnite si, že bielej farbe nezodpovedá žiadna vlnová dĺžka, iba náš pocit.

Podobne však zmes zelenej a červenej vnímame rovnako, ako žltú tvorenú jednou vlnovou dĺžkou, no v jednom prípade sa jedná o čistú farbu a v druhom o zmes.

Vyzbrojení poznatkami o farbách a oku sa môžeme pustiť do samotnej úlohy. Kľúčom k riešeniu je uvedomiť si, aký je rozdiel medzi zdrojom farebného svetla a farebným filtrom. Na prvý pohľad to vyzerá rovnako: v miestnosti osvetlenej červeným filtrom vidíme všetky predmety červené. Podobne, keď sa na svet pozrieme cez červený filter, tiež je všetko červené. No nie je to to isté. Kým zdroj svetla emituje do sveta červené svetlo, filter svetlo nevyrába, iba pohlcuje všetko okrem červenej.

Rozdiel medzi filtrom a zdrojom svetla spozorujeme, keď skúsime pridať ďalšiu farbu, napríklad zelenú. Ak zasvietime zmesou zelenej a červenej do oka (alebo na biely podklad), vidíme žltú. Ak však pozrieme na svet cez sústavu zeleného a červeného filtra, svet nebude žltý, ale tmavý až čierny. V prvom prípade na sietnicu nášho oka dopadlo zelené a červené svetlo, to mozog interpretuje ako žltú. V druhom prípade biele svetlo (teda zmes všetkých farieb dúhy) prešlo najprv cez zelený filter - ostala len zelená, a potom ešte cez červený filter, ktorý zelenú pohlcuje. Teda v ideálnom prípade by nemalo ostať nič. Nič má čiernu farbu.

Nakoniec sa zamyslime, čo sú pastelky: zdroje svetla alebo filtre? Skôr sa podobajú na filtre. Keď na obrázok nakreslený zelenou pastelkou dopadne biele svetlo, pastelka pohltí všetky farby okrem zelenej, ktorá sa odrazí. Zmes červenej, zelenej a modrej pastelky teda pohltí všetko svetlo, na papieri ostane čudná tmavá farba.[2]

Z toho vyplýva aj návod, z akých farieb miešať na papieri. Základnými kameňmi budú pre nás všetko okrem modrej – žltá, všetko okrem zelenej – purpurová a všetko okrem červenej – azúrová. Aby sme nemuseli príliš plytvať farbami, tak je zvykom používať ešte čiernu. A prvé písmená anglických názvov týchto troch farieb spolu s posledným písmenom anglického názvu čiernej tvoria skratku CMYK, ktorá sa spomína často v súvislosti s farebnými tlačiarňami.

Na záver upozorním na jednu nepresnosť, s ktorou som sa v riešeniach niekoľkokrát stretla. Nie je vždy pravda, že biele svetlo bez zeleného, červeného a modrého svetla bude tma. Ak odfiltrujeme iba tieto tri vlnové dĺžky, stále nám v svetelnej zmesi môže ostať žltá, oranžová, fialová, atď. Nie je tiež pravda, že denné biele svetlo sa skladá z RGB, denné svetlo sa skladá zo všetkých farieb dúhy. (Sama dúha je toho dôkazom.) No je pravda, že zmes RGB vnímame ako biele svetlo.

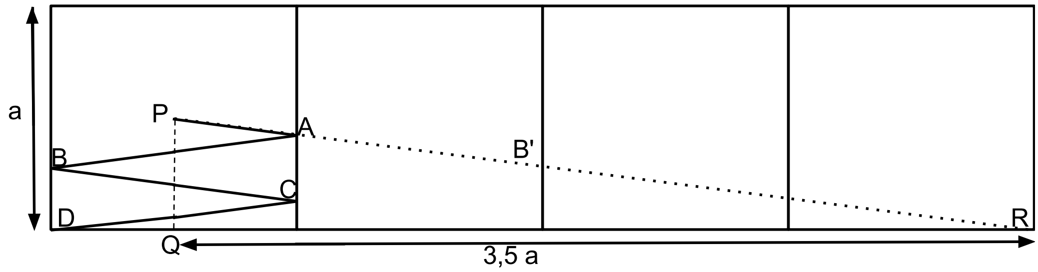
Bodovanie: 9 bodov je za riešenie obsahujúce vysvetlenie, ako funguje skladanie zdrojov svetla a ako funguje skladanie pasteliek a kde je podstatný rozdiel. Za nepresnosti, nesprávne tvrdenia, zlé úvahy, som strhla 1-2 body, podľa závažnosti. Taktiež som strhla 1-2 body za zbytočné „omáčky“, ktoré sa okrajovo týkali riešenia, ale nieviedli k odpovedi na našu otázku, najmä keď nebolo jasne vyčlenené, ktorá časť textu je riešenie a ktorá sú omáčky.

[2] Prečo nie čierna? Nuž, na to sú dva dôvody. Prvý je, že pastelky nie sú dokonalé filtre, napríkad aj čierna pastelka sa trochu dá prekryť tak, že cez ňu dostatočne dlho čmárame zelenou. Nepriehľadný filter by neprepustil nič, bez ohľadu na to, koľko zelených filtrov by sme zaň nastavali. Druhý dôvod je, že pastelka neodráža presne jednu vlnovú dĺžku a nepohlcuje úplne všetky ostatné vlnové dĺžky. V skutočnosti pastelka veľmi odráža zelenú, o čosi menej trochu inú zelenú, skoro úplne absorbuje červenú… Tieto nedokonalosti spôsobujú, že od takej zmesi pasteliek sa čosi predsa len odrazí.

3.2 B1 – Squash (opravoval Jano)

Peťo rád hrá squash. Najradšej v kockovej miestnosti s hranou a. Momentálne stojí v strede miestnosti, keď odpáli loptičku tesne nad zemou pod uhlom 45 stupňov od zeme (pozri obrázok). Loptička sa následne odrazí od prednej steny, od zadnej steny a ešte raz od prednej steny, až nakoniec skončí v pravom zadnom rohu miestnosti. Akú počiatočnú rýchlosť udal Peťo loptičke?

Aby sme získali nadhľad, pozrime sa na situáciu z hora, ako ukazuje obrázok.



Obr. 2: Pohľad zhora

Peťo z miesta P vystrelí loptičku, tá sa odrazí v miestach A, B, C a dopadne do rohu D. Pri odraze od steny uvažujeme dokonale pružné zrážky, vtedy zložka hybnosti kolmá na stenu zmení znamienko a rovnobežná sa nemení. To nám umožňuje využiť nasledovný trik. Miestnosť zrkadlovo preklopíme okolo steny a tvárime sa, že loptička po odraze sa neodrazí, ale pokračuje do zrkadlovej miestnosti. Premyslite si, že toto nič nepokazí, ak skúmame len odrazy od stien, nie stropu. Opakovaným použitím triku dostávame dlhú miestnosť zloženú z niekoľkých zrkadlených malých a riešime obyčajnú úlohu šikmého vrhu. Vzdialenosť, ktorú má loptička preletieť je $\frac{5\sqrt{2}}{2}a$, z čoho vieme určiť jej rýchlosť (hádžeme pod $45\,^\circ$ uhlom).

$$v^2 \sin(2\alpha)/g = \frac{5\sqrt{2}}{2}a$$

Z toho už ľahko dopočítame

$$v = \sqrt{5\sqrt{2}ag}/2$$

Treba však overiť, že naša loptička pri svojom pohybe nezasiahne strop, to by bol ďalší odraz, ktorý v zadaní popísaný nie je. Loptička má na začiatku rovnako veľkú vodorovnú aj zvislú zložku rýchlosti. V priemere je však zvislá zložka polovičná (lineárne spomaľuje až na nulu) a vodorovná sa nemení. Vzdialenosť, ktorú loptička prejde v zvislom smere je preto polovica vzdialenosti vo vodorovnom smere $\frac{5\sqrt{2}}{4}a$. Je dôležité, aby táto hodnota bola menšia ako dvojnásobok výšky miestnosti (loptička cestuje hore aj dole).

Teda má platiť nerovnosť

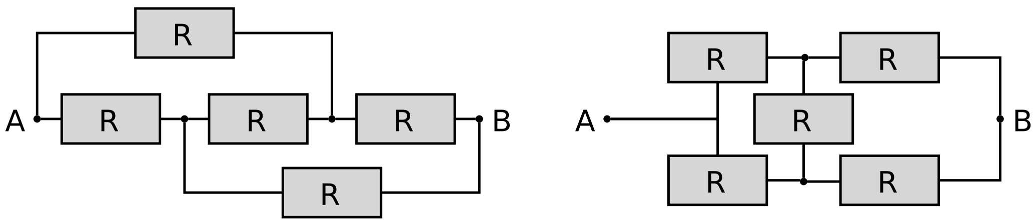
$$5\sqrt{2} < 8$$

Po umocnení na druhú ju môžete jednoducho overiť.

3.3 B2 – Ľúbezné odpory (opravovala Tinka, vzorák Samo)

Určte odpor medzi bodmi A a B na obrázku.

Keď trochu poposúvame objekty na obrázku, bude zapojenie prehľadnejšie.



Obr. 3: Zapojenie zo zadania

Stredným odporom zo symetrie nemôže tiecť prúd, lebo obrázok je osovo súmerný podľa jednej osi. Pozor, nie je súmerný podľa oboch osí, lebo body A a B sú rôzne, na jednom je plus a na druhom mínus.

Keď odporom netečie prúd, je zbytočný, škrtneme ho. Dostávame obyčajné paralelné zapojenie s odporom veľkosti R.

3.4 B3, A1 – Budiška (opravoval Lukáš)

Odmerajte, aký najväčší tlak sa dokáže vytvoriť vo fľaške Budišky, keď ňou poriadne zatrasiete.

Zadananie od nás chcelo odmerať, aký najväčší tlak sa dá dosiahnuť v Budiške zatrasením. Mnohí z vás sa snažili maximalizovať tlak nielen trasením, ale aj použitím sýtenej minerálky, dvojlitrovej fľaše alebo zohrievaním minerálky (lebo rozpustnosť CO_2 s rastúcou teplotou klesá). Niektorí merali tlak po zatrasení ešte neotvorenej minerálky, iní ju predtým otvorili, lebo zisťovali, aký tlak sa dá dosiahnuť iba trasením. Všetky tieto interpretácie zadania sú v poriadku. Zameriame sa však na spôsob, akým možno odmerať tlak vo fľaši, ako výsledky vyhodnotiť a prezentovať.

Na meranie tlaku vo fľaši ste vymysleli viaceré metódy, niektoré z nich popíšem:

- Prvou je odmerať, koľko CO_2 sa z minerálky uvoľní ztrasením a zo stavovej rovnice a znalosti objemu vzduchu nad minerálkou určiť tlak. Objem plynu možno zmerať napríklad napustením do balónika alebo ešte lepšie (ak sa chceme vyhnúť manévrom pri otváraní fľaše a uzatváraní balónika) do priehľadnej nádoby hore dnom ponorenej vo väčšej nádobe. Ak je hladina vody v oboch nádobách v rovnakej výške, tlak plynu v nádobe otočenej hore dnom je rovný atmosferickému. Rovnako možno tlak plynu v balóne považovať za rovný atmosferickému. Objem voľného miesta vo fľaši určíme meraním množstva vody, ktoré treba na doplnenie fľaše (nezabudneme spraviť čiarku na mieste pôvodnej hladiny, aby sme mohli meranie opakovať). Dobrou aproximáciu tepelného deja pri nafukovaní balónika alebo napúšťaní nádoby pod vodou je izotermický dej. Z Boylovho-Mariotovho zákona ľahko vypočítame tlak, ktorý nás zaujíma.

- Ďalšou veľmi peknou možnosťou bolo využiť Bernoulliho rovnicu. Natlakovanú fľašu postavíme na vyvýšené miesto (aby sme mohli merať väčšie dĺžky a teda merali presnejšie), niekde v spodnej časti spravíme dierku, ideálne v mieste, kde je jej povrch zvislý a meriame, ako ďaleko dostrekne minerálka (d). Tiež odmeriame vzdialenosť dierky od zeme H

a od hladiny h. Z dostreku vieme určiť výtokovú rýchlosť minerálky – obyčajný vodorovný vrh, dostaneme $v = d\sqrt{\frac{g}{2H}}$. Bernoulliho rovnicu napíšeme v tvare $p + h\rho g = p_{\mathrm{atm}} + \frac{1}{2}\rho v^2$. Zanedbávame rýchlosť pohybu hladiny vo fľaši v počiatočnom momente, kedy je dostrek najdlhší. Po úpravách dostaneme $p = p_{\mathrm{atm}} + \rho g(\frac{d^2}{4H} - h)$

- Inou populárnou metódou bolo narazenie hadičky či už pod hladinou alebo nad hladinou minerálky (vtedy bola hadička naplnená vodou). Pretlak vo fľaši je potom rovný $h\rho g$, kde h výškový rozdiel medzi hladinou v hadičke a (v prípade napichnutia pod hladinu minerálky) hladinou vo fľaši alebo (v prípade napichnutia hadičky s vodou nad hladinu minerálky) pôvodnou hladinou v hadičke.

- Niektorí z vás sa rozhodli upustiť od kuchynských metód a využiť výdobytky modernej techniky. Využili ste tlakomery určené na meranie tlaku v pneumatikách, prístroj zo školského laboratória či dedkov pokazený tlakomer. Technika v sebe skrýva veľký potenciál. Dá sa sledovať, ako sa údaj mení s časom, či rastie, klesá, na akej hodnote sa ustáli. Z jedného merania môžem odčítať viacero hodnôt a štatisticky vyhodnotiť. Toto sa dalo aj pri hadičkových metódach, avšak nie pri meraní objemu plynu alebo dostreku. Treba si teda dávať pozor a nevkladať priveľkú dôveru do displeja alebo ručičky a nezobrať jedinú nameranú hodnotu za presnú.

Výsledky, ktoré ste dostali sa pohybovali od hodnôt len o niekoľko kPa nad atmosferickým tlakom až po 700 kPa. Výsledky z merania objemu plynu boli pri hornej hranici, meranie výšky vodného stĺpca v hadičke pri dolnej. Pri meraní objemu plynu mohol byť problém s tým, že pri otvorení minerálky vybublal ešte ďaší plyn, ktorý predtým do tlaku neprispieval. Porovnanie viacerých metód nespracoval z nikto z vás.

A čo by v riešení experimentálky nemalo chýbať? (Vo všetkých bodoch platí – presne, ale stručne.)

- Výber metódy, ktorú sme používali, zdúvodnenie, prečo funguje a popis merania. Tiež treba popísať použité pomôcky a vzorku. Tu by ma napríklad zaujímalo, či tlak závisí od objemu fľaše a či možno v perlivej minerálke spraviť väčší tlak ako v neperlivej. Žiaľ, väčšina z vás túto informáciu neuviedla.

- Namerané veličiny, výpočet výsledku (ak sme tlak nemerali priamo), štatistiku (priemer, odchýlky), odhad chýb merania, pokúsiť sa aj zistiť, kde sa vo vašej metóde mohli vyskytnúť permanentné chyby, ktorým smerom posunuli výsledok a ich približný číselný odhad. Mimochodom, v tejto úlohe sa dalo rozumne zdôvodniť, prečo z viacerých meraní neberieme priemer, ale najvyšší tlak – ak sme zadanie pochopili ako športovú súťaž v natlakovaní minerálky.

- Krátko zhodnotiť, či je výsledok reálny, teda či sme neodmerali tlak, pri ktorom by sa fľaša roztrhla, alebo naopak, tlak menší ako atmosferický.

Poznámka 1: Autor vzoráku je teoretik, preto žiaden experiment nerobil.

Poznámka 2: Parafrázovanie poznámky 1 v riešení experimentálky v niektorej z ďalších sérii FKS vám veľa bodov neprinesie.

3.5 B4, A2 – Bucatiny (opravoval Polik)

Peťo si na intráku veľmi často varí bucatiny. Pri varení využíva zaujímavý spôsob, ktorý tu však popisovať nebudeme. Po dovarení sa bucatiny zmiešajú s kupovanou omáčkou a pridá sa nastrúhaný syr. Peťo je ale zábudlivý a vždy si spomenie, že syr treba strúhať, až keď sú už bucatiny hotové. Akú stratégiu má zvoliť, ak chce, aby výsledné jedlo bolo čo najteplejšie? Má omáčku zmiešať s bucatinami a potom začať strúhať syr, alebo najskôr začať strúhať syr a všetko zmiešať dokopy až na záver? Svoju odpoveď Peťovi vysvetlite.

Peťo snáď nieje lama a nenechá bucatiny vychladnúť. Ak bude strúhať syr dostatočne rýchlo, ochladnú len kraje a stred ostane ešte teplý.

Rýchlosť tepelnej výmeny na jednotku plochy je úmerná (nie nutne priamo, ale dá sa to tak dobre aproximovať) rozdielu teplôt medzi telesami, medzi ktorými k nej dochádza. To je pomerne známy a uveriteľný fakt – keď je vonku mráz, je Vám väčšia zima, ako keď je dvadsať stupňov, pritom teplota Vášho tela sa drží na tridsať sedem.

Zmiešajme studenú omáčku s bucatinami. Teplota zmesi razom poklesne a teda aj rýchlosť ochladzovania sa na jednotku plochy bucatín. Ďalší efekt je že zapchatie medzier medzi bucatinami omáčkou zníži celkovú plochu a opäť spomalí tepelnú výmenu. Z opačného dôvodu majú radiátory rebrá.

Tepelný tok z bucatín bez omáčky bude teda väčší a stratia viac tepla, ako v prípade s omáčkou - výsledná teplota bude teda menšia. Asi. Ešte lepšie je si to experimentálne overiť:-)

3.6 A3 – Samove kľúče (opravoval MaťoCh)

Samo sa často mimovoľne hrá s predmetmi okolo seba. Z tohto dôvodu si kúpil všeodolný mobilný telefón, ten už za svoj krátky život zažil mnoho pádov. O ňom však nie je táto úloha. Samo sa veľmi rád hrá s Marikinmi kľúčmi na šnúrke. Roztočí si kľúče okolo prsta a čaká (ďalej už neroztáča), kým mu do neho vrazia. Určte, akou rýchlosťou sa kľúče pohybujú tesne pred nárazom ak poznáte dĺžku šnúrky, hrúbku prsta (aproximujte valcom) a počiatočnú rýchlosť, ktorú Samo kľúčom udelil.

Pre jednoduchosť najskôr zanedbajme gravitáciu (neskôr ukážeme, že prípad s gravitáciou nespôsobuje veľké komplikácie). Bez gravitácie je jediná sila pôsobiaca na kľúče sila od nitky. Táto vždy pôsobí v smere kolmom na smer pohybu kľúčov, teda nemení ich rýchlosť. Ak by totiž rýchlosť mala aj zložku v smere nitky, nitka by prestala byť napnutá, čo zo skúsenosti vieme, že nie je pravda.

Sila kolmá na smer pohybu nekoná prácu a teda nemení kinetickú energiu kľúčov. Energia sa teda zachováva a kľúče vrazia do Samovho prsta s rovnakou rýchlosťou akou ich Samo roztočí.

Nezanedbaním gravitácie by pribudla nová sila pôsobiaca na kľúče stále by však platilo, že sila nitky nespôsobuje zmenu kinetickej energie kľúčov a teda rýchlosť kľúčov by sme dostali zo zákona zachovania mechanickej energie kľúčov.

Toľko k riešeniu, na záver sa ešte pozrieme ako je to so zachovávaním sa momentu hybnosti kľúčov, nakoľko sa rôzne (väčšinou nesprávne) tvrdenia o momente hybnosti často vyskytovali vo vašich riešeniach. Pre jednoduchosť znova vypneme gravitáciu, môžete si sami premyslieť čo sa zmení s ňou.

Niektorý ste nesprávne usúdili, že moment sily pôsobiaci na kľúče je nulový v dôsledku čoho by sa zachovával moment hybnosti. Je pravda, že jediná sila, ktorá pôsobí na kľúče, je sila od nitky a ak zoberieme za rameno otáčania vzdialenosť kľúčov a bodu dotyku valca a nitky, je moment sily vzhľadom k bodu dotyku nulový. Avšak bod dotyku sa pohybuje po povrchu valca (navyše s rastúcou uhlovou rýchlosťou) a nestojí. Keď určíme moment sily napríklad vzhľadom k stredu kruhu, či ľubovoľnému inému bodu v rôznych časoch, vidíme že moment sily je nenulový a teda moment hybnosti nekonštantný.

3.7 A4 – Hodinky (opravovala Marika, vzorák Majo)

Bzdušo odhodil svoje hodinky rýchlosťou v blízkou rýchlosti svetla. Teraz ich sleduje cez ďalekohľad. Koľkokrát za minútu vidí pohnúť sa sekundovú ručičku?

Uvažujme, že Bzdušo hodil hodinky rovnomernou rýchlosťou v (blízkou rýchlosti svetla c). Označme si vzťažnú sústavu spojenú so Bzdušom S a sústavu spojenú s hodinkami S'. Medzi týmito inerciálnymi sústavami platia špeciálne Lorentzove transformácie (SLT):

$$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) \qquad x' = \gamma(x - vt)$$
$$y' = y \qquad z' = z$$

kde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Keďže nás bude zaujímať čas, ktorý prejde v sústave S', ktorý ale nameria Bzdušo vo svojej sústave S, potrebujeme inverzné vzťahy[3], teda

$$t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x') \qquad x = \gamma(x' + vt')$$
$$y = y' \qquad z = z'$$

Predstavme si teraz, že sme pozorovateľ spojený s S' sediaci v mieste x'_1, a hodinky (tiež umiestnené v x'_1), tie letiace – zahodené, ukazujú čas t'_1. Vieme si to predstaviť tak, že hodinky v čase t'_1 vyšlú svetelný signál do nášho oka a my okamžite (keďže sme v rovnakom mieste) vidíme čas, ktorý ukazujú. Nech hodinky vyšlú ďalší signál v čase $t'_2 = t'_1 + \Delta t'$, vtedy budú v mieste $x'_2 = x'_1$ (lebo hodinky sa vzhľadom na S' nepohybujú).

Zistime teraz, ako by to celé dopadlo v sústave S, teda chceme vedieť aký bude časový rozdiel Δt. Využijúc Lorentzove transformácie

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_1 + \Delta t' + \frac{v}{c^2}x'_1) - \gamma(t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1)$$
$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Tento efekt nie je nič iné ako známa *dilatácia času*. Zistime teraz o koľko sa tieto hodinky posunú v priestore (opäť vzhľadom na S)

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma(x'_1 + v(t'_1 + \Delta t')) - \gamma(x'_1 + vt'_1)$$
$$\Delta x = \gamma v \Delta t'$$

[3] To, že platia tieto inverzné transformačné vzťahy sa dá ihneď nahliadnuť z toho, že musí platiť Galileov princíp relativity, teda formulácia fyzikálnych zákonov musí byť rovnaká vo všetkých inerciálnych vzťažných sústavách. V pôvodných transformačných vzťahoch preto stačí zameniť čiarkované a nečiarkované premenné a znamienko rýchlosti. Rovnaký výsledok však musíme dostať aj priamym riešením sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych – vyjadrením x, t cez x', t'.

Teda vzhľadom na Bzdušovu sústavu vyšlú hodinky dva signály s časovým odstupom Δt, pritom sa vzdialia od Bzduša o Δx. Keď k Bzdušovi dorazí prvý signál (a on stlačí stopky na svojich hodinkách), musí čakať na druhý signál jednak čas Δt (čo je časový odstup medzi signálmi) a dvak čas $\Delta x/c$ (čo je čas, ktorý musí druhý signál dobehnúť, keďže bol vyslaný z iného miesta). Keď k Bzdušovi dorazí druhý signál, on zastaví svoje stopky a nameria čas

$$T = \frac{\Delta x}{c} + \Delta t = \gamma \Delta t' \left(\frac{v}{c} + 1\right) = \Delta t' \frac{1 + \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Po úpravách (a preznačení $T' = \Delta t'$)

$$T = T' \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

Tento jav sa nazýva *relativistický Dopplerov jav.*

Ak uvažujeme, že sekundová ručička tikne 60-krát za minútu, potom Bzdušo vidí $60\frac{T'}{T} = 60/\sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$ tikov za minútu.

V konkrétnom prípade povedzme, že $v = 0{,}5c$ (kto by mal záujem naučiť sa takto hádzať hodinky, treba sa kontaktovať so Bzdušom). Potom dostaneme v sústave S: $60/\sqrt{3} \approx 34{,}6$ tikov za minútu. Bzdušo teda vidí, že čas v pohybujúcej sa sústave na letiacich hodinkách sa výrazne spomalil.

Poslená poznámka: Niekto by mohol nadobudnúť dojem, že klasický Dopplerov jav je limitným prípadom relativistického. Tento dojem je správny, avšak nemôžeme bezhlavo pustiť $c \to \infty$. Treba si uvedomiť, že c tu vystupuje v dvoch rôznych úlohách. V Lorentzových transformáciách ako rýchlosť svetla a ako rýchlosť signálu šíriaceho sa z letiacich hodiniek (zhodou okolností opäť rýchlosť svetla). Ak pošleme $c \to \infty$ v Lorentzových transformáciách a zameníme rýchlosť signálu-svetla za nejakú všeobecnú rýchlosť signálu (napr. zvuku), dostaneme

$$\Delta t = \Delta t' \qquad \Delta x = v\Delta t' \qquad T = \Delta t' \left(\frac{v}{c} + 1\right)$$

teda (c je rýchlosť signálu)

$$T = T' \frac{c + v}{c}$$

čo je klasický Dopplerov jav.