Fyzikálny korešpondenčný seminár
28. ročník, 2012/2013
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 1. kola letnej časti 2012/2013

1.1 B0 – Balóniky (opravovala Tinka)

Kaja pozerala film Hore (Up v anglickom origináli) a zaujalo ju, nakoľko je film realistický. Odhadnite, koľko balónikov by bolo potrebných na vzlietnutie malého rodinného domčeku z dreva, ako vo filme!

Ako mnohí z Vás od začiatku tušili, balónikov bude treba šialene veľa. Preto budeme odhadovať, koľko najmenej balónikov by asi tak bolo treba a tomu prispôsobíme naše zjednodušenia.

Všetci ste prišli na to, že na to, aby sa domček vôbec odlepil od zeme, musia sa vyrovnať tiažová a vztlaková sila pôsobiace na domček a balóny. Hmotnosť balónov môže byť prinajlepšom nulová - zanedbáme hmotnosť obalu a naplníme ich vákuom. Hmotnosť domčeku bude rádovo v tonách. Vztlakovú silu pôsobiacu na domček zanedbáme, schová sa v nepresnosti odhadu jeho hmotnosti [1]. Čo zostáva je vztlaková sila pôsobiaca na balóniky. Ak odhadneme, že balónik má približne 10 litrov, tak pri bežnej hustote vzduchu $1{,}2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ naň pôsobí približne $0{,}1\,\mathrm{N}$ a teda na udvihnutie tony by ich bolo treba aspoň stotisíc. V skutočnosti by teda bolo treba asi milióny balónov. A to je veľmi nerealistické.

Vo vašich riešeniach zväčša chýbalo popísanie toho, čo vlastne zjednodušujete a prečo je to OK, respektíve akým smerom to posunie výsledok. Bude to v skutočnosti viac či menej? Takáto úvaha je pri odhade dôležitá, lebo inak nám ten odhad nič nepovie.

1.2 B1 – Ľahká tyč (opravovala KatkaK)

Samo sa v Andrejovom zošite z dejepisu dočítal o zaujímavom spôsobe, pomocou ktorého starí Čukčovia hľadali ťažiská bambusových tyčí. Najstarší starešina vzal bambusovú tyč, podoprel ju dvoma prstami na krajoch a za zvuku bubnov, vzývajúc božstvá, začal posvätný úkon. Pomaly posúval prsty k sebe, kým sa nedotkli. Miesto, kde sa prsty stretli, bolo pod ťažiskom tyče. A úroda bola zachránená.

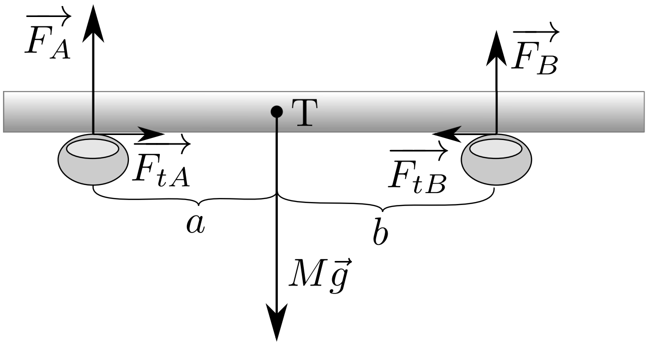
Dnes, keď Xenu poznáme len z televízie, vznikla potreba nájsť fyzikálne vysvetlenie tohto zázraku, ktoré nebude stáť na starých mýtických poverách. Preto sa obraciame na teba, Riešiteľ, aby si nám s touto neľahkou úlohou pomohol. Ako je možné, že sa prsty stretli vždy priamo pod ťažiskom tyče?

Táto správa je prísne tajná, po prečítaní ju znič!

Táto metóda je založená na trení medzi prstami a tyčou. O trecej sile F_t vieme, že bráni proti pohybu dvoch povrchov a jej veľkosť je $F_t \leq fF_n$, kde F_n je sila pritláčajúca dva povrchy. Poďme sa preto pozrieť, aké sú veľkosti síl, čo pritláčajú tyč na prsty.

Nech je ťažisko medzi prstami tak, že od prstu A je vzdialené a a od prstu B vzdialené b, a F_A, F_B sú pritlačné sily na jednotlivé prsty:

[1] Akoby bol z menej hustého dreva.



Obr. 1: Rituál

Šamanova metóda je založená na trení medzi prstami a tyčou. Keď k sebe priťahujeme prsty, tak jeden podšmykuje pod tyčou, ale druhý ostáva stáť vzhľadom na ňu stáť. O trecej sile F_t vieme, že bráni pohybu dvoch povrchov (u nás prst-tyč) a jej veľkosť je $F_t \leq fF_n$, kde F_n je sila pritláčajúca dva povrchy. Keďže trecia sila bráni pohybu povrchov, tak je prirodzené, že ten prst, ktorý neprešmykuje, pôsobí na tyč väčšou trecou silou, než ten, ktorý podšmykuje pod tyčou.

Ak je tyč v pokoji (čo môžeme predpokladať, ak tie prsty pohybujeme dosť pomaly), potom musí byť výslednica síl na ňu nulová.

$$F_A + F_B = Mg$$

Zároveň sa tyč ale ani neotáča, teda aj moment síl na ňu je nulový. Za bod otáčania si môžem zvoliť ľubovoľný bod, lebo tyč sa neotáča okolo žiadneho bodu. Zvolím si ťažisko a dostanem:

$$F_A a = F_B b$$

Z tých dvoch rovníc dostávame veľkosti jendotlivých síl:

$$F_A = Mg\frac{b}{a+b}, F_B = Mg\frac{a}{a+b}$$

Zoberme si teraz situáciu, že ťažisko je bližšie k prstu A, teda $a < b$. Z toho jasne vyplýva, že aj

$$Mg\frac{a}{a+b} < Mg\frac{b}{a+b}$$

, teda

$$F_B < F_A$$

. Nás zaujímala ale trecia sila - tá pod prstom B bude môcť mať menšiu hodnotu než pod prstom A, teda prst B (ako sme si všimli na začiatku) bude ten podšmykujúci. Suma sumárum, ten prst, ktorý je ďalej od ťažiska, podšmykuje. Týmto podšmykovaním sa vzdialenejší prst teda k ťažisku približuje, až dovtedy, kým k nemu nebude bližšie ako ten druhý prst, kedy zastane a pošmykovať začne druhý prst. A prsty sa takto striedajú. Týmto postupom sa prsty stále k sebe blížia a zároveň nechávajú ťažisko medzi sebou. Keď sú na sebe úplne nalepené, tak šaman môže jednoducho prehlásiť, že ťažisko je nad prstami.

1.3 B2 – Banánomet (opravoval Maťo Ch.)

Luxusko podlieha tvrdému útoku. Pália na neho banány z banánometu rýchlosťou u. On však nebojácne bez straty cti a rozvahy zachytáva všetky banány svojimi veľkými ústami. Je vždy pripravený! Banány na neho pália frekvenciou f, jemu by však lepšie sadla frekvencia $h > f$, lebo je hladný. Rozbehol sa preto banánovému útoku oproti. Ako rýchlo musí bežať, aby dosiahol požadovanú frekvenciu h dopadu banánov do svojich úst?

Banány idú k Luxuskovi rýchlosťou u a prichádzajú s frekvenciou $f = u/L$, kde L je vzdialenosť medzi jednotlivými letiacimi banánmi. Keď sa Luxusko rozbehne voči banánom rýchlosťou v, vzájomná rýchlosť približovania sa banánu a Luxuska bude $u + v$. Vzdialenosť medzi banánmi sa však nezmení, preto $h = (u+v)/L$. Dosadením za L z prvého vzťahu máme $v = u(h-f)/f$.

1.4 B3/A1 – Záhadná krabička (opravoval Andrej)

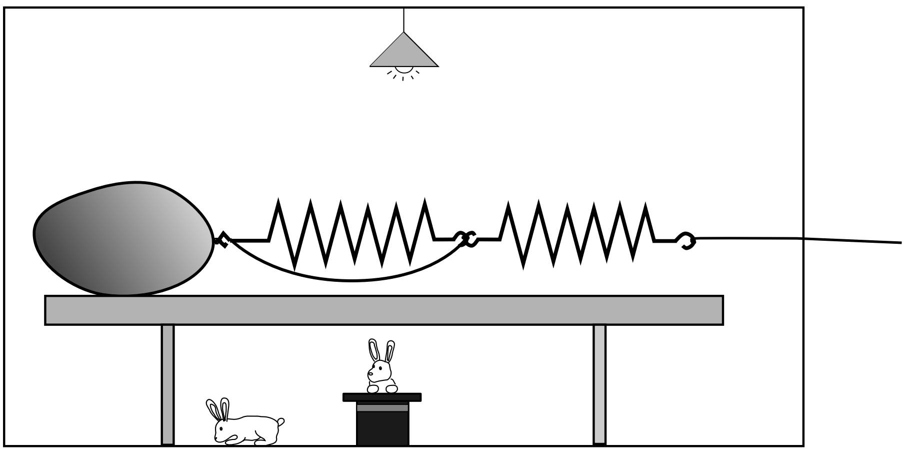
Kaťa sa v noci zobudila na čudný šramot v skrini. Vstala, opatrne podišla k nej, otvorila ju a tam - príšera! Skríkla a rozbehla sa skryť do podkrovia. Tam ale zakopla o záhadnú krabičku, z ktorej trčala šnúrka. Tak za ňu začala ťahať a s prekvapením zistila, že sila, ktorou musí ťahať, sa mení v závislosti od dĺžky povytiahnutia tak, ako je znázornené v grafe. Viete jej poradiť, čo by v nej mohlo byť?

Celou ideou príkladu je si to rozsekať a začať od začiatku a postupne modifikovať. Čo sa správa tak, že keď to vyťahujem, tak sila lineárne narastá? Pružina predsa! Prvá časť grafu je odbavená. Potom máme ďalšiu lineárnu závislosť, ale strmšiu. To by zase mohla byť nejaká pružina, ktorá má väčšiu tuhosť než predošlá. Ako ale zariadiť zlom?

Postačí mechanická zarážka (napríklad špagát rovnako dlhý ako prislúchajúce vytiahnutie, kde nastáva zlom) okolo slabšej pružiny.

Máme zatiaľ dve pružiny zapojené za sebou, pričom okolo slabšej je mechanická zarážka odpovedajúca zlomu v grafe. Už len doraziť vodorovnú časť. Na ňu si stačí uvedomiť, že druhý koniec pružín musí byť o niečo uchytený. Vhodným riešením je napríklad balvan na vodorovnom povrchu s vysokým trením, ktorý po dosiahnutí potrebnej veľkosti sily prekoná trenie a začne sa pohybovať, teda skrátenie šnúrky bude odpovedať posunutiu kvádra pri rovnakej sile.

Tu sa môžete kochať nad magic mechanickou sústavou:



Obr. 2: Záhadná krabička

1.5 B4/A2 – Vodná (opravoval JAno, vzorák Lukaf)

Vezmite si nádobu tvaru valca a na jej spodku vyrobte malú kruhovú dierku (pokiaľ možno sa snažte o hladké okraje). Nádobu naplňte vodou a odmerajte závislosť výšky hladiny od času. Namerané údaje zaznačte do grafu, kde na os x vyznačíte čas t a na os y vyznačíte $\sqrt{h(t)}$, kde $h(t)$ je výška hladiny v čase t.

Meranie opakujte viackrát (aspoň päťkrát) a na základe opakovaní určte neistoty merania, ktoré vyznačíte do grafu v podobe errorbarov. Do grafu následne vyznačte lineárny fit hodnôt. Závislosť výšky hladiny od času vypočítajte aj teoreticky a na základe neho a lineárneho fitu merania vypočítajte efektívny prierez dierky, cez ktorú voda vyteká. Porovnajte efektívny prierez so skutočným a celé meranie zopakujte aspoň pre tri rôzne prierezy.

V riešení dôkladne popíšte, ako ste postupovali. V ideálnom prípade svoj postup zdokumentujte aj fotografiami.

Začneme najskôr teoretickou časťou a vypočítame závislosť výšky hladiny v nádobe od času. To nám okrem vyriešenia druhej časti úlohy poskytne vhľad do toho, čo vlastne chceme zmerať. Nech je na začiatku výška vodného stĺpca nad dierkou h_0, prierez nádoby S_1 a prierez dierky S_2. Cez dierku vyteká z nádoby voda, pričom za čas Δt vytečie z nádoby objem vody ΔV. Objem, ktorý vytečie dierkou sa prejaví na zmene výšky hladiny, pričom ak predpokladáme nestlačiteľnosť vody, musí byť objem určený zmenou výšky hladiny rovnaký ako objem vody, ktorý vytiekol dierkou (počítame ho ako valec vody prierezu S_1 a dĺžky Δx).

$$S_1 \Delta h = S_2 \Delta x$$

Predelíme časovým intervalom, za ktorým nastanú posunutia, a máme vzťah medzi rýchlosťou vody v_x vytekajúcej otvorom a rýchlosťou poklesu hladiny v_h.

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_1}{S_2}\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{S_1}{S_2} v_h$$

Rýchlosť vody vytekajúcej otvorom vieme vypočítať. V každom okamihu platí Bernoulliho rovnica:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{konšt.}$$

My do nej dosadíme hodnoty z miest, o ktorých máme údaje, teda o hladine a dierke. Za nulovú výšku zoberieme dno. Za hladinu budeme mať výraz s rýchlosťou hladiny v_h a aktuálnou výškou hladiny h, za dierku rýchlosť v_x a výšku dna 0.

$$\frac{1}{2}\rho v_h^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho v_x^2$$

Po dosadení vzťahu medzi rýchlosťami dostaneme vzťah pre rýchlosť v_h.

$$\frac{1}{2}\rho v_h^2 + \rho g h = \frac{1}{2}\rho \frac{S_1^2}{S_2^2} v_h^2$$

Z tohto vyjadríme v_h:

$$v_h = \sqrt{2hg\frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} = \sqrt{2hg'}$$

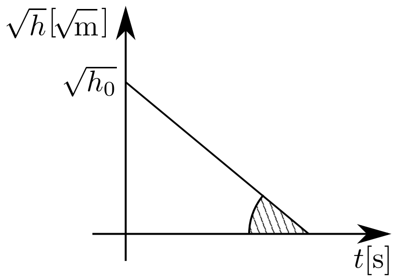
Pomer povrchov sme zahrnuli do modifikovaného tiažového zrýchlenia g'. Vzťah pre rýchlosť je rovnaký ako poznáme z voľného pádu - rovnomerne zrýchleného pohybu. Teda aj výška hladiny sa musí pohybovať rovnomerne zrýchlene so zrýchlením g', inak by sme takúto rovnicu nemohli dostať.[2] Môžeme teda napísať závislosť h od času.

$$h = h_0 - tv_h - \frac{1}{2}g't^2 = h_0 - t\sqrt{2hg'} - \frac{1}{2}g't^2$$

Na pravej strane sa nám objavilo h. Povieme si, že neznáma je $\sqrt{h}$, riešime kvadratickú rovnicu a vyberieme jej fyzikálne zmysluplné riešenie (to, podľa ktorého výška hladiny klesá).

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_0} - t\sqrt{\frac{g'}{2}} = \sqrt{h_0} - t\sqrt{\frac{g}{2}\frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}$$

Teraz už vidíme, prečo budeme do grafu nanášať závislosť $\sqrt{h}$ od času. Podľa rovnice hneď vidíme, že ide o klesajúcu priamkovú funkciu, ktorá pretína zvislú os v hodnote $\sqrt{h_0}$ a tangens vyznačeného uhla je výraz $\sqrt{\frac{g}{2}\frac{S_2^2}{S_1^2 - S_2^2}}$ obsahujúci hľadaný prierez otvoru, ktorý nás zaujíma.



Obr. 3: Graf závislosti $\sqrt{h}$ od času

Teraz môžme pristúpiť k meraniu. Ak budeme dodržiavať zadanie a nasledujúce rady, dostaneme rozumné výsledky (a veľa bodov):

- Vyberieme si nádobu, ktorej prierez je v celej výške konštantný (napríklad valcovú, ako radí návod). Vo výpočtoch sme totiž prierez považovali za konštantu. Ak meranie uskutočňujeme s fľašou exotických tvarov, márne budeme fitovať lineárnu závislosť.
- Na nádobu si nakreslíme alebo prilepíme mierku, aby sme mohli lepšie odčítavať výšku hladiny (žiadne manipulovanie s pravítkom v jednej ruke pričom druhou držíme upchatú dierku).
- Zmeriame prierez nádoby, ktorý treba na výpočet prierezu dierky. Lepšie ako merať priamo priemer kruhu je naliať do nádoby známy objem vody a odčítať výšku (alebo

[2] Mávanie rukami namiesto poriadneho vysvetlenia je evidentné. Dva dôležité fakty o rovnici: je ZZE pre voľne padajúce teleso (predstavte si hmotnú hladinu a nechajte zmiznúť zvyšok kvapaliny). A rovnica platí pre všetky $0 \geq h \geq h_0$. Spojením tohto už to rovnomerné zrýchlenie dostanete.

postaviť nádobu na váhu, naliať do presnej výšky hladiny a sledovať hmotnosť, pretože presnú výšku nalejeme ľahšie ako presný objem). Pre čo najväčšiu presnosť meranie opakujeme napríklad aj s rôznymi objemami/výškami a vyhodnotíme graficky. :-)

- Postupujeme presne podľa zadania. Čas je nezávislá premenná, výška hladiny závislá premenná. Zvolíme si teda niekoľko časov, v ktorých budeme merať. Je dobré voliť dlhšie časy, pretože reakčná doba človeka - experimentátora je približne konštantná a pri meraní dlhších časov sa prejaví menej ako pre meraní kratších.

- Pre každý z týchto časov niekoľkokrát (n, napríklad 5) zmeriame výšku hladiny: nalejeme vodu do známej výšky hladiny h_0, otvoríme dierku, chvíľu necháme odtekať a keď na stopkách spozorujeme želaný čas, zastavíme vodu a odčítame výšku hladiny. Mnohí ste na tieto účely využili kameru a vhodný software na spracovanie videa.

- Z hodnôt výšky hladiny vypočítame aritmetický priemer:

$$\overline{h(t_a)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i(t_a)$$

  V tomto vzťahu je $\overline{h(t_a)}$ priemerná výška hladiny v čase t_a, a $i = 1, \ldots, n$ sú jednotlivé merania, $\sum_{i=1}^{n} h_i(t_a)$ značí súčet $h_1(t_a) + h_2(t_a) + \cdots + h_n(t_a)$.

- Rovnako pre každý čas vypočítame neistotu merania:

$$\sigma h(t_a) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left[h(t_a) - \overline{h(t_a)} \right]^2}$$

  Poznámka: V literatúre sa pri výpočte neistoty merania často objavuje v menovateli $n-1$ (počet stupňov voľnosti) namiesto n (počet meraní). Logika za tým je taká, že ak na výpočet aritmetického priemeru používame tú istú sadu meraní, ako na výpočet neistoty, nie je všetko od seba nezávislé (ak poznáme aritmetický priemer, hodnotu jedného merania si vždy vieme z ostatných dopočítať). Pre veľkú sadu meraní je to jedno, ale pre malú sadu meraní je vhodnejšie používať počet stupňov voľnosti.

- Hodnotu výšky hladiny v každom čase napíšeme ako $h(t_a) = \overline{h(t_a)} \pm \sigma h(t_a)$.

- Nakreslíme graf s označenými a ociachovanými osami. Zaznačíme body $\overline{h(t_a)}$ a pre každý bod nakreslíme errorbar. To znamená čiaru dĺžky $\sigma h(t_a)$ vychádzajúcu z každého bodu rovnobežne s osou h (osou, na ktorú nanášame závisle premennú). Všimnime si, že každý bod môže mať errorbar rôznej dĺžky, napríklad z už spomínaného dôvodu, že pri dlhých časoch sa naše reflexy prejavia menej.

- Určíme rovnicu priamky, zodpovedajúcej závislosti $h(t)$. Ak nie sme zástancovia old school a nepoužívame milimetrový papier a nemeriame uhly, je to koeficient pri čase, ktorý nám vypľuje kalkulačka alebo počítač. Z koeficientu pri čase vypočítame prierez dierky. [3]

[3] Uskutočnenie celej tejto procedúry som mal na mysli pod grafickým vyhodnotením merania prierezu nádoby.

Merania ste zväčša pekne zvládli. Pri tabuľkách je vhodné dbať na celkovú prehľadnosť a pri grafoch na označenie osí a rozumné škálovanie. Jednak ich robíte pre čitateľa, nie pre povinnosť, dvak ak z nich odčítavate koeficient pri t, tak je to nutnosť. Neistoty (odchýlky) mali mnohí naznačené, ale neobjasnené.

Pri teórií sa poniektorí nechali zviesť a nevhodne požili Torricelliho vzorec, ktorý zanedbáva zmenu výšky hladiny a mnohí si pomoli tzv. déčkovými vzťahmi pre zmeny hladiny za maličký čas a integrovaním (ktoré zvládli prekvapivo dobre). Trik na správne zrátanie bez integrovania si nevšimol nikto.

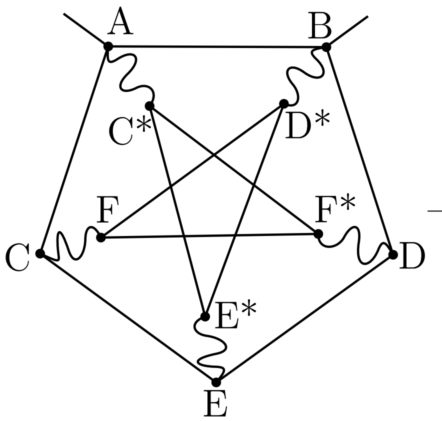
1.6 A3 – Náhrdelník (opravoval Mišo, vzorák Kaja)

Marika dostala od Boba krásny valentínsky darček - náhrdelník v tvare Petersenovho grafu. Ako správna fyzička sa hneď zamyslela, aký má asi odpor. Viete jej poradiť? Všetky hrany majú rovnaký odpor R. Mimo vyznačených vrcholov sa drôtiky nedotýkajú.

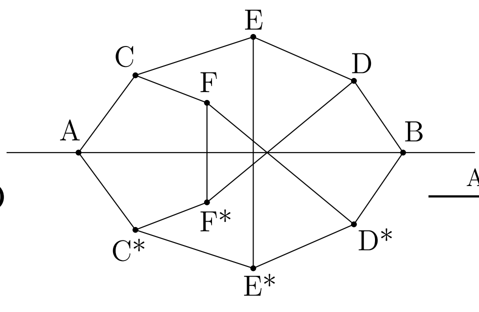
Kde prekreslenie sériu a paralelu nájsť nepomáha a cesty pána Kirchhoffa desia viac, než podposteľné príšery, je čas vydať sa na pátranie po symetrii!

Z grafického hľadiska chceme prekresliť náhrdelník tak, aby bol súmerný podľa priamky AB.[4] Z „grafového“ hľadiska chceme uzly (vrcholy grafu) popárovať na symetrické dvojice, napr. M, M*. Ak M je spojené vodičom s X a Y, tak M* bude spojené s X* a Y*. Ak nejaký uzol nemá pár, tak je sám k sebe symetrický a bude ležať na priamke AB. Samotné A a B nebudú mať pár (lebo z nich vychádza prívodný a odvodný vodič niekam do paže).

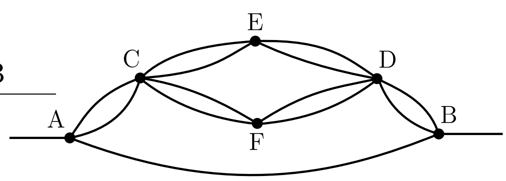
Toľko k teórii. Teraz príde prax. Vidíme, že uzol A je spojený s troma ďalšími, z toho jeden je B. Zvyšné dva by teda mohli byť symetrické, tak si ich tak nakreslíme a označíme C, C*. To isté urobíme na opačnej strane pri B a zakreslíme uzly D, D*. Teraz si môžeme všimnúť, že C a D majú spoločného suseda (E) aj C* a D* majú spoločného suseda (E*), takže tieto dva uzly asi tiež budú tvoriť pár. Zakreslíme ich. No a ostanú nám posledné dva uzly, ktoré si preventívne označíme F, F*. Doplníme ich do obrázku spolu so zvyšnými vodičmi podľa pôvodného grafu a overíme, či sú nami označené dvojice uzlov naozaj symetrické. Hurá, sú!



Obr. 4: Náhrdelník



Obr. 5: Symetria



Obr. 6: Po zlúčení

[4]Drôtiky môžeme ľubovoľne naťahovať, skracovať a ohýbať, nie však rozpájať či spájať (zatiaľ).

A teraz príde fyzika! Kukneme sa na obrázok a vidíme, že symetrické uzly majú rovnaký potenciál.[5] Keby nemali, tak vieme otočiť celú schému okolo osi symetrie o pol otáčky, čím by sa nič nemalo zmeniť. Ibaže keby mali symetrické uzly rôzny potenciál, vymenili by si ich.

Keďže elektróny sú lenivé, nebudú sa zbytočne premávať medzi takýmito uzlami bez ohľadu na to, či medzi nimi je alebo nie je vodič. Bola by to pre ne zbytočná strata času a energie. Veď na svojej strane majú presne také isté chodníčky a ony len chcú prejsť z jedného konca na druhý. Dokonca ich netrápi ani to, keď symetrické uzly úplne zlúčime. Veď čo… Dvakrát viac vtečie, dvakrát viac vytečie.

Keďže 10 uzlov sa nám zdá veľa, tak ich zlúčime! Urobíme si nový náčrtok, kde nám vzniklo ľahko zrátateľné sériovo-paralelné zapojenie. A môžeme rátať.

Varovanie! Toto doma neskúšajte:

$$R_C = \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{R}+\cfrac{1}{R}} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{R}+\cfrac{1}{R}} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R}+\cfrac{1}{R}}} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{R}+\cfrac{1}{R}} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R}+\cfrac{1}{R}}}} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R}+\cfrac{1}{R}}}} = \frac{3}{5}R$$

No… Radšej si uvedomíme, že zdvojený vodič má polovičný odpor oproti normálnemu a budeme to rátať pekne postupne od vnútra von. Tak či tak, výsledný odpor je:

$$\frac{3}{5}R$$

1.7 A4 – Sysľova guľa (opravoval Petrik)

Syseľ má doma vo vákuu wolfrámovú (absolútne čiernu) guľôčku polomeru $1\,\mathrm{cm}$. Syseľ ju rozpálil do žlta na teplotu $3\,000\,\mathrm{K}$. Za aký čas guľôčka zhasne? Predpokladajte, že guľôčka prestane svietiť približne pri teplote $800\,\mathrm{K}$. Úlohu môžete riešiť numericky na počítači (napr. s využitím tabuľkového kalkulátora). Pri riešení predpokladajte, že vyžarovanie telesa sa riadi Stefan-Boltzmannovým zákonom pre žiarenie čierneho telesa. Potrebnú teóriu nájdete napríklad aj na Wikipédii.

Čo sa presne deje s guľou? Všetky veci nahriate na nejakú (nenulovú) absolútnu teplotu žiaria. Aj vy a aj Sysľova guľa. Pre absolútne čierne teleso (také, čo pohltí všetko žiarenie, čo naň dopadne) platí Planckov, Stefan-Boltzmannov a Wienov zákon.[6] Guľa teda bude odovzdávať teplo žiarením (je vo vákuu, vedením ani prúdením nemôže). Vo vnútri ale nemá žiaden zdroj tepla, teda bude chladnúť výkonom P podľa Stefan-Boltzmanna. Ako od nich všetci vieme (resp. nám pomohla wiki), jeden meter štvorcový gule žiari intenzitou σT^4, teda konštanta krát absolútna teplota gule na štvrtú. Celkový výkon je intenzita krát plocha:

$$P = 4\pi r^2 \sigma T^4$$

[5] Potenciál je veličina podobná napätiu s tým rozdielom, že potenciál je vlastnosť bodu a závisí od našej voľby bodu s nulovým potenciálom (napríklad bod A). Napätie je definované ako rozdiel potenciálov. Preto potenciál sa rovná napätiu medzi daným bodom a bodom s nulovým potenciálom.

[6] Ak tieto zákony nepoznáte, posurfujte wiki, sú tam fajn obrázky :) .

Drobná poznámka k absolútnosti teploty. Ak guľa ochladne na izbovú teplotu T_0, ktorá je dajme tomu 300 K, podľa vzorca by mala stále žiariť, a teda strácať teplo. To však nedáva zmysel, veď guľa má rovnakú teplotu ako okolie. Čo s tým? Aj celý okolitý svet žiari na izbovej teplote $T_0 = 300$ K. To znamená, že naša guľa v každom momente prijíma výkon $P_0 = 4\pi r^2 T_0^4$. Pri izbovej teplote sa tieto dva výkony navzájom vyrušia (jeden prijme, druhý vyžiari), a tak nastáva očakávaná tepelná rovnováha.

Výkon okolia ale zanedbáme, lebo číslo T_0^4 je omnoho menšie ako 800 (alebo 3000) Kelvinov na štvrtú. V konečnom výsledku nám táto korekcia spôsobuje rozdiel asi jednu sekundu.

Na odovzdané teplo guľou použijeme základoškolský vzorec, $\Delta Q = mc\Delta T$. Tu ale pozor! Tepelná kapacita c sa mení s teplotou, a to vcelku výrazne – pri 3000 Kelvinoch je až $300\,\mathrm{Jkg}^(-1)\mathrm{K}^(-1)$ miesto tabuľkami uvádzaných $134\,\mathrm{Jkg}^(-1)\mathrm{K}^(-1)$. Presnejšiu závislosť možno nájsť na internete.[7] Pre tých lenivejších, vyzerá asi takto:

$$c(T) = 23{,}7 + 5{,}13\tau - 2\tau^2 + 0{,}73\tau^3\,\mathrm{Jmol}^(-1)\mathrm{K}^(-1),$$

kde $\tau = T/1000$, a molárna hmotnosť je 184 $\mathrm{gmol}^(-1)$.

Teraz sa do toho môžeme pustiť. Zmena energie za malý časový úsek Δt je $\Delta Q = -P\Delta t$. Mínus znamená, že tým výkonom chladneme. Dostávame rovnicu:

$$mc\Delta T = -4\pi r^2\sigma T^4\Delta t$$

a po dosadení $m = 4/3\rho\pi r^3$

$$\Delta T = -\frac{3\sigma T^4}{r\rho c}\Delta t$$

Toto je rovnica, ktorú možno napchať do počítača. Ako to v počítači vyzerá? Napríklad takto, v jazyku C++:

```
while(T >= Tf){
    dT = -3*sigma*T*T*T*T*dt/(r*rho*cap(T));
    t = t + dt;
    T = T + dT;
}
...
double cap(double T){
    double t = T/1000;
    return (23.7 + 5.13*t - 2.0*t*t + 0.734*t*t*t)/0.184; }
```

Preložené do ľudského jazyka: pokiaľ je teplota väčšia-rovná ako konečná teplota $T_f = 800$ K, odčítavaj dT od T a zvyšuj čas. Výsledok je 110 sekúnd, resp. takmer 97 sekúnd pre konštantnú kapacitu (v oboch prípadoch pre časový dielik $\Delta t = 0{,}1$ s).[8]

Tento príklad sa dá spočítať aj analyticky.[9] Delty nahradíme déčkami (kapacitu berieme konštantnú),

$$\frac{dT}{T^4} = -\frac{3\sigma}{r\rho c}dt$$

[7] Zdroj: `http://nist.gov/data/PDFfiles/jpcrd263.pdf`

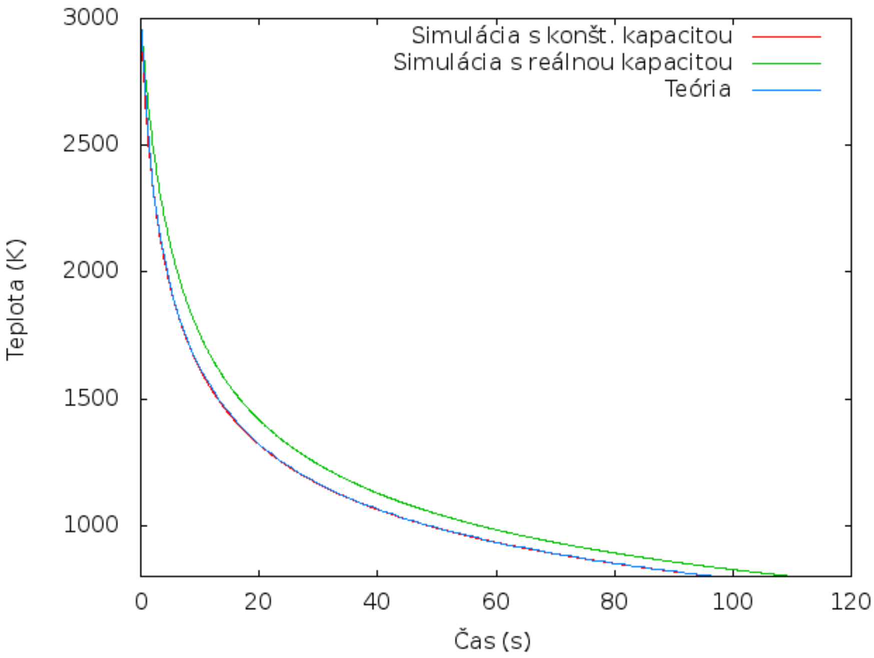
[8] Hustota wolfrámu je $19300\,\mathrm{kg/m^3}$, a ako konštantnú tepelnú kapacitu sme brali 134 J/kg K.

[9] A to aj so žiarením od okolia P_0, makáči môžu vyskúšať. Bez konštantnej kapacity je to potom ešte o niečo komplikovanejšie.

a po integrácii[10] máme

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{T_0^3}-\frac{1}{T_f^3}\right)=\frac{3\sigma}{r\rho c}t$$

Ako ukazuje graf, numerický výpočet a simulácia sú vo veľmi dobrej zhode.



Obr. 7: Graf

Ohľadom bodovania, strhávali sme jeden bod za neuvedomenie si závislosti tepelnej kapacity na teplote. No ak riešiteľ napísal: „Viem, že kapacita závisí na teplote, ale pre zjednodušenie počítam s konštantnou,“ tak to mal za plný počet.

[10]Niektorí vieme a niektorí ešte nie, že platí

$$\int_a^b x^n dx=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$$

.