Fyzikálny korešpondenčný seminár
29. ročník, 2013/2014
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2013/2014

3.1 B0 – Lungern… (opravovali Maťo Ch. a Lukáš)

Kdesi ďaleko na jazere Lungernersee sa plaví loďka, na ktorej stojí Samko, pričom vezie so sebou pomerne dosť ťažkých tehál. Krása stredošvajčiarskych jazier ho natoľko dojímala, že počas plavby omylom vysypal skoro všetky tehly do jazera. Namiesto toho, aby ich išiel vyloviť, sa zamyslel nad otázkou, čo sa stalo s výškou vodnej hladiny vzhľadom na loďku a brehy jazera. Zdvihla sa? Klesla? Nezmenila sa? Pomôžte Samkovi vyriešiť túto dilemu.

Po prečítaní zadania zalovíme v pamäti, čo nám to v tej škole hovorili o telesách ponorených do kvapaliny. Súvisel s nimi Archimedov zákon. Zopakujme si preto, čo presne nám hovorí: *Teleso ponorené do kvapaliny je nadľahčované vztlakovou silou, ktorej veľkosť sa rovná tiaži kvapaliny s rovnakým objemom, ako je objem ponorenej časti telesa.*

V prvej časti riešenia sa pozrieme na zmenu výšky hladiny vody vzhľadom na loď. Na loď pôsobia dve sily. Vztlaková a gravitačná. Keďže loď pláva, musí platiť, že sily sa navzájom kompenzujú. Takže pre tiažovú silu, ktorá pôsobí na loď s hmotnosťou M, platí $F_g = Mg$, kde g je gravitačné zrýchlenie. Pre vztlakovú silu, ktorá pôsobi v kvapaline s hustotou ρ, platí $F = V\varrho g$, kde V je objem ponorenej časti lode. Keď dáme F a F_g do rovnosti, dostaneme rovnicu

$$V\varrho g = Mg\,,$$

z ktorej vyjadríme hĺbku ponoru lode

$$h_1 = \frac{M}{S\rho}\,.$$

Predpokladáme pri tom zjednodušený model lode v tvare pravouhlého hranolu s plochou podstavy S.

To bol prípad, kedy sme už tehly nemali na palube. Keď budeme brať do úvahy prípad, že tehly sú ešte stále na palube, celý výpočet sa zmení len v tom, že k hmotnosti lode M pripočítame hmotnosť tehál m a pre výšku ponorenia dostaneme

$$h_2 = \frac{M+m}{S\rho}\,.$$

Vidíme, že $h_2 > h_1$. To znamená, že po vyhodení tehál z lode hladina vody vzhľadom na loď klesne.

Teraz rozoberme, ako sa zmnení výška hladiny vzhľadom na brehy rieky. Vezmime si objemy V_1 a V_2, kde prvý objem je objem vytlačenej kvapaliny, keď sú na lodi tehly a druhý, keď tam už nie sú. Nepedagogicky začneme tým druhým. Pre objem V_2 dostávame z Archimedovho zákonu

$$V_2 = \frac{M}{\rho_\mathrm{v}} + \frac{m}{\rho_\mathrm{t}}\,,$$

Seminár podporujú: iuventa APVV
Mediálny partner: ČESKOSLOVENSKÝ ČASOPIS PRO FYZIKU

kde ρ_v je hustota vody a ρ_t je hustota tehál. Pre objem V_1 dostávame veľmi podobný výraz, ktorý sa odlišuje od predchádzajúceho len tým, že hmotnosť lode a tehál musíme sčítať, pretože tehly sú v tomto prípade na palube, tzn.

$$V_1 = \frac{M+m}{\rho_\text{v}}\,.$$

Objemy V_1 a V_2 môžeme porovnať. Po úprave dostaneme výraz

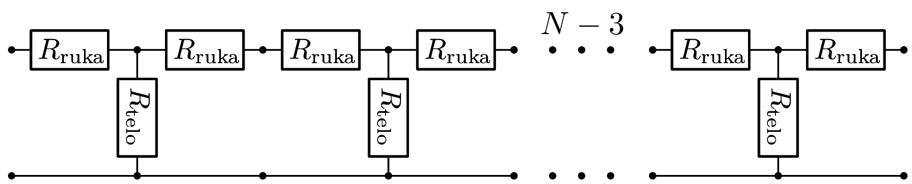
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{M\rho_\text{v} + m\rho_\text{t}}{M\rho_\text{v} + m\rho_\text{v}}\,.$$

Hustota tehál je určite väčšia ako hustota vody. O tom sa vieme presvedčiť práve tým, že tehlu hodíme do vody, a budeme sa pozerať na to, ako sa potápa. Potom ale platí, že čitateľ posledného výrazu je väčší ako menovateľ. To isté musí však platiť aj pre objemy na druhej strane rovnice. Menší vytlačený objem sa prejaví v poklese vodnej hladiny. Preto výška vody vzhľadom na brehy jazera klesne.

3.2 B1 – Za ruky sa pochytáme, raz, dva, tri! (opravoval Jimi)

Andrejovi mama odmalička zakazovala strkať pazúre do zástrčky. Andrej sa ale nenechal zastrašiť, tak si zavolal všetkých svojich kamarátov z FKS. Nuž, všetci sa pekne pochytali za rúčky a posledný člen (Andrej) sa napojil do zástrčky.

Celé toto „pochytanie sa“ si môžeme nasimulovať asi takto:



Obr. 1: Zapojenie Andrejových kamarátov

Za jedného Andrejovho kamaráta považujme pre jednoduchosť trojicu odporov R_ruka, R_telo a R_ruka, pričom $R_\text{ruka} = 0{,}5\,\mathrm{M\Omega}$ a $R_\text{telo} = 2{,}5\,\mathrm{M\Omega}$. V zástrčke je napätie $U = 220\,\mathrm{V}$.

Koľko ľudí z FKS musí minimálne prísť Andrejovi pomôcť, aby sa nikomu nič nestalo? Teda žiadnou časťou tela kohokoľvek netiekol prúd väčší než $I_{☠} = 0{,}1\,\mathrm{A}$?

Týmto vás upozorňujeme, že tento pokus je životu nebezpečný a vyslovene zakazujeme úlohu riešiť experimentálne!

Pozrime sa, ako by vyzerala situácia, ak by sa do zástrčky zapojil iba Andrej. Prúd by prechádzal iba cez jeho jednu ruku a telo. Tie majú spolu odpor $0{,}5\,\mathrm{M\Omega} + 2{,}5\,\mathrm{M\Omega} = 3\,\mathrm{M\Omega}$. Tým pádom by podľa Ohmovho zákona Andrejom pretekal prúd

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220\,\mathrm{V}}{3\cdot 10^6\,\Omega} \doteq 73\,\mu\mathrm{A}\,.$$

Teda Andrejov odpor bohato stačí na to, aby túto hru prežil sám. Pozor! Stále počítame len s veľmi zjednodušeným modelom, ktorý úplne nekorešponduje s realitou. Stále odporúčame, aby ste to doma v neskúšali!

Skúsme sa však ešte pozrieť ešte na to, čo by sa zmenilo, ak by si predsa len zavolal kamaráta. V tom prípade sa zmení ich spoločný odpor[1], a to na hodnotu

$$R_2 = R_{ruka} + \frac{R_{telo}(R_{telo} + 2R_{ruka})}{2R_{telo} + 2R_{ruka}} = 0{,}5\,\mathrm{M\Omega} + \frac{3{,}5\,\mathrm{M\Omega} \cdot 2{,}5\,\mathrm{M\Omega}}{5\,\mathrm{M\Omega} + 1\,\mathrm{M\Omega}} \doteq 1{,}46\,\mathrm{M\Omega}\,.$$

Tento odpor je menší, ako keď bol Andrej zapojený sám. No prúd[2] bude stále iba

$$220\,\mathrm{V}/1{,}46\,\mathrm{M\Omega} = 0{,}112\,\mathrm{mA}\,.$$

To, že sa celkový pretekajúci prúd zväčšil bolo očakávané. Môžeme si teda položiť trochu inú otázku: Koľko kamarátov by si mohol Andrej prizvať, aby to všetci prežili bez následkov?

Musíme si uvedomiť, že odpor pochytaných ľudí je vždy aspoň 0,5 MΩ, keďže jedna Andrejova ruka je zapojená v sérii so zvyškom zapojenia. Teda aj keby bol odpor zvyšku ľubovoľne malý, tak zapojením bude tiecť maximálny prúd

$$\frac{220\,\mathrm{V}}{0{,}5\,\mathrm{M\Omega}} = 0{,}44\,\mathrm{mA}\,.$$

Preto by si Andrej mohol pozvať na túto nebezpečnú (!) šokujúcu párty toľko kamarátov, koľko len chce.

3.3 B2 – Potrhaná palička (opravoval Jakub)

Keď si Vlejd išiel do FKS obchodu kúpiť nejaké nové kladky, tak si neďaleko na stene všimol paličku pribitú klincom za jeden jej koniec. Vlejdovi prišlo ľúto smutne visiacej paličky, tak ju otočil okolo osi klinca o $180°$ tak, že ostala v labilnej rovnovážnej polohe. Aby toho nebolo málo, tak na jej horný koniec ešte upevnil svoj dvojkilový hmotný bod, ktorý nosí bežne po kapsách, a jemne doňho šťuchol. Vlejd samozrejme rátal s tým, že hmotný bod aj s paličkou začnú vykonávať rotačný pohyb okolo osi klinca. Čo ale nečakal bolo to, že sa palička roztrhla už po tom, ako opísala uhol α. Vlejd zostal v nemom úžase.

a) Čo spôsobilo, že sa palička roztrhla?

b) Palička toho zrejme neudrží nekonečne veľa. Aké najťažšie závažie by sme na ňu pôvodne (ešte predtým, než Vlejd vkročil do obchodu) mohli zavesiť, aby sa neroztrhla?

Úlohu riešte pre dva rôzne uhly $\alpha_1 = 45°$ a $\alpha_2 = 135°$, pričom celú dobu predpokladajte, že palička má zanedbateľnú hmotnosť a trenie okolo klinca je nulové.

Každý z vás mal už určite v ruke plastelínu. Keď na ňu budete pôsobiť nejakou silou, tak zmení svoj tvar. Pri plastelíne tento jav môžeme vidieť najvýraznejšie, ale v skutočnosti tento istý jav prebieha v každej látke. Ak budete napríklad na kovovú tyč pôsobiť dostatočne veľkou silou, tak sa natiahne. Ako veľmi sa nejaké teleso natiahne, keď naň pôsobíte silou, opisuje veličina nazývaná modul pružnosti. Každá látka sa navyše správa inak, keď ju stláčate, naťahujete alebo krútite, preto rozoznávame viac druhov modulov pružnosti (v ťahu, tlaku a strihu).

[1] Pridaním jedného kamaráta vznikne v sériovom zapojení navyše aj paralelné, pričom v jednej vetve bude jedno telo (kamaráta) a dve ruky (oboch) a v druhom iba telo Andreja. Skúste si to nakresliť.

[2] Počítame prúd, ktorý bude prechádzať Andrejovou rukou, ktorá sa dotýka zdroja, pretože táto časť obvodu sa ešte nevetvila, a teda ňou preteká naväčší prúd.

Navyše vieme, že neexistuje žiadna látka, ktorá by vydržala akýkoľvek nápor. Každý materiál má tzv. medzu pevnosti, ktorá hovorí, aké maximálne mechanické napätie môžeme v materiáli vytvoriť bez toho, aby došlo k trvalému poškodeniu. Akonáhle napätie v látke prekročí túto medzu, elastické väzby, ktoré pôsobia medzi molekulami sa porušia a dôjde k nevratnej (plastickej) deformácii telesa.

V našom prípade budú sily na paličku pôsobiť iba tlakom a ťahom. Keď je palička v hornej polohe a je na nej zavesený hmotný bod, pôsobí na hmotný bod tiažová sila $F_g = mg$ a bod na paličku pôsobí tlakom. Vieme teda, že palička odolá minimálnemu tlaku F_g/S, kde S je plocha prierezu paličky.

Keď začne hmotný bod s paličkou padať, začne naň pôsobiť zotrvačná odstredivá sila a tiažová sila pôsobiaca v smere paličky sa začne zmenšovať. Inak povedané, tlak na paličku bude klesať, no začne narastať ťah. V určitom okamihu nastane moment, kedy ťah paličky prekročí maximálnu možnú hodnotu (medzu pevnosti) a palička sa roztrhne. Poďme si túto medzu vypočítať.

Označme si l dĺžku paličky a α uhol, ktorý prešla od začiatku svojho pohybu. Zaujímať nás budú iba sily, ktoré spôsobujú ťah a tlak, preto si tiažovú silu rozložíme do smeru paličky a do smeru naň kolmého.[3] Zložka tiažovej sily v smere paličky bude mať veľkosť[4]

$$F_{g1} = -mg\cos\alpha\,.$$

Odstredivá sila má veľkosť

$$F_o = \frac{mv^2}{l}\,.$$

Vidíme, že vzorec vyžaduje znalosť informácie hodnoty rýchlosti. Keďže zo zadania vieme, že v probléme nevystupuje žiadne trenie (čiže sa nič z celkovej energie nepremieňa na teplo), tak s radosťou môžme použiť zákon zachovania energie. V začiatočnej polohe má hmotný bod len potenciálnu energiu[5]

$$E_{p1} = 2mgl\,.$$

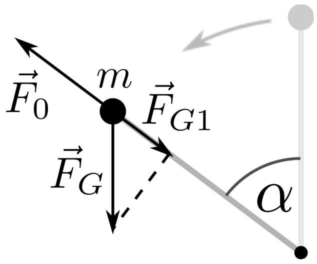
Po prejdení uhlu α bude mať hmotný bod rýchlosť v a výšku $l\,(1+\cos\alpha)$. Podľa zákonu zachovania energie bude platiť

$$\begin{aligned} 2mgl &= mgl\,(1+\cos\alpha) + \frac{mv^2}{2}\,,\\ v &= \sqrt{2gl\,(1-\cos\alpha)}\,. \end{aligned}$$

[3] Za kladný smer budeme považovať smer ťahu paličky, tj. smer, ktorý akoby ukazuje samotná palička.

[4] Znamienko mínus je tam práve preto, lebo kladný smer ukazuje od paličky.

[5] Povedzme, že za výšku nulovej potenciálnej energie budeme považovať výšku, v ktorej je hmotný bod v stabilnej polohe, tj. úplne dole.



Obr. 2: Pôsobenie síl v smere paličky

Výsledná ťahová sila, ktorá na paličku pôsobí, je potom

$$F_v = 2mg\,(1 - \cos\alpha) - mg\cos\alpha = mg\,(2 - 3\cos\alpha)\ .$$

Do vzorca si teraz môžeme dosadiť zadané uhly α_1 a α_2. Po dosadení uhlu α_1 však s prekvapením zistíme, že $F_v < 0\,\mathrm{N}$. Čo to znamená? Znamená to, že na paličku ešte stále pôsobí tlak a žiadny ťah sa zatiaľ nezačal prejavovať. Tento tlak je však menší, aký na paličku pôsobil, keď bola v zvislej polohe. To znamená, že paličku zatiaľ nemá čo roztrhnúť a tým pádom vieme povedať, že Vlejd určite nemohol pozorovať roztrhnutie pri takomto uhle!

Pre uhol α_2 však dostávame krásne riešenie pre maximálnu silu

$$F_v = mg\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\ .$$

Na paličku teda môže pôsobiť maximálna sila F_v, čo znamená, že najťažšie závažie, ktoré môžeme na paličku zavesiť v stabilnom stave, má hmotnosť

$$M = m\left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = 8{,}24\,\mathrm{kg}\,.$$

3.4 B3/A1 – Podchladená voda (opravoval Mišo)

Podchladená voda je stav vody, v ktorom má síce teplotu menšiu, než je jej teplota mrznutia, no je stále kvapalná. Tento stav nie je stabilný, po narušení voda začne mrznúť.

Vyrobte podchladenú vodu vo fľaši a namerajte, akou približnou rýchlosťou sa bude pohybovať rozhranie voda-zmrznutá voda, keď po vrchu fľaše udriete (vtedy začne voda zhora mrznúť).

Toto meranie opakovať nemusíte, pretože je možné, že budete mať problém urobiť čo i len jedno. Podarený experiment však musí byť riadne zdokumentovaný (foto, video)! Odporúčame nechať vodu pred vložením do mrazničky nejakú dobu odstáť a nechať mraziť niekoľko fliaš súčasne.

Experiment si samozrejme skúsila aj Kaja a na konci sa zamyslela nad otázkou: Aké bude zloženie výslednej zmesi, ak predpokladáme, že cez fľašu žiadne teplo neuniká? (Nedeje sa nič iné, než že voda zamrzne na ľad a ustáli sa teplota v nádobe.) Pri tomto teoretickom výpočte predpokladajte, že si Kaja vyrobila fľašu s 1,5 litrom podchladenej vody a teplotou $-4\,^\circ\mathrm{C}$. Merné skupenské teplo vody (aj podchladenej) je $c = 4{,}180\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kgK}}$ a skupenské teplo mrznutia je $l = 334\,\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$.

Pre to, aby sme vedeli správne navrhnúť experiment, teda mrazenie vody, musíme niečo vedieť o tom, čo sa vo vode pri mrznutí deje. Poviete si, že čo je na tom, bachnem vodu do mrazáku a bude. No, možno, ale na podchladenú vodu by ste museli mať naozaj šťastie, aby to takto fungovalo.

Mrznutie vody začína vždy v určitom bode, tzv. kondenzačnom jadre, čo môže byť nerovnosť povrchu, alebo nečistota plávajúca vo vode. Takýchto jadier môže byť vo vode veľa. Pri znížení teploty pod nulu sa nám na týchto jadrách začnú molekuly usadzovať do kryštalickej štruktúry. To my ale v prípade podchladenej vody nechceme. My chceme, aby mala teplotu pod nulou, ale stále bola kvapalná. Dostaneme teda stav, kedy látka existuje v určitom stave, aj keby už v tom stave za daných podmienok existovať nemala – to sa volá metastabilita. Stačí malý „šťuchanec“ a látka prejde do stabilného (v tomto prípade pevného) stavu.

Je teda zrejmé, že potrebujeme eliminovať kondenzačné jadrá v našej vode. To nám automaticky vyraďuje minerálky a tvrdé vody, ideálna by bola zrejme destilovaná voda, ale malo by to ísť aj s nízko mineralizovanou. Kondenzácia môže vzniknúť aj pri mechanickom pohybe častíc a turbulenciách s tým spojených, čiže voda musí byť dobre odstáta. Taktiež na stenách nádoby nesmú byť mikroskopické nerovnosti, na ktorých by vznikal ľad. V plastových fľašiach by sa tento problém nemal prakticky vyskytovať.

Náš experiment, či skôr jeho výsledok je možné nájsť na youtube.[6] Výška vody vo fľaši je 30 cm a mrznutie trvalo 10 s, takže rozhranie voda-ľad sa pohybovalo rýchlosťou $3\,\mathrm{cm/s} = 0{,}03\,\mathrm{m/s}$.

To, čo vyzerá ako ľad, je však skôr zmes ľadovej drte a vody. Zvoľme si jednoduchý model – kalorimetrickú rovnicu. Spočítajme, koľko ľadu by nám vlastne malo vzniknúť. Kalorimetrická rovnica je v podstate len energetická bilancia, alebo zákon zachovania energie. V našom prípade platí

$$L_l = Q\,,$$

kde L_l je skupenské teplo, ktoré sa uvoľní pri zamrznutí ľadu a Q je to isté teplo, ale z pohľadu podchladenej vody. To je preto, lebo voda toto teplo prijme nato, aby sa dostala do stabilného stavu. Po rozpísaní jednotlivých členov rovnice dostávame

$$m_l l_t = mc(T - T_0) \quad \Rightarrow \quad m_l = \frac{mc(T - T_0)}{l_t}\,.$$

Po dosadení hodnôt zo zadania ($m = 1{,}5\,\mathrm{kg}$; $c = 4{,}18\,\mathrm{kJ/kg.K}$; $T = (0 + 273{,}15)\,\mathrm{K}$; $T_0 = (-4 + 273{,}15)\,\mathrm{K}$) dostávame hmotnosť vzniknutého ľadu 75 g. Pozor, stupne Celzia prevázdame na Kelviny, pretože v takých jednotkách máme zadané kapacity. Matematicky to odčítanie vyjde aj tak rovnako, ale takáto dôslednosť nám zachráni mnoho nervov pri menej prehľadných úlohách. Odčítaním od pôvodnej hmotnosti 1,5 kg dostaneme aj hmotnosť stále kvapalnej vody. Kto si potrpí na percentá, podielom 0,075/1,5 zistí, že ľad tvorí 5 hmotnostných percent zmesi. Pohľad na video navodzuje dojem, že toho ľadu tam asi vzniklo trochu viac. Nuž, zrejme je to dôsledok zjednodušenosti modelu, čo hádam prežijeme.

3.5 B4/A2 – Šplhúň (opravoval Filip)

Jakub s Kubom hrali biliard. Po istom neprimeranom údere jedného z hráčov zletela biela guľa zo stola na zem a zrazu sa ocitla na úpätí strmého svahu so sklonom α. Biliardová guľa sa otáčala okolo vodorovnej

[6] `https://www.youtube.com/watch?v=DjbSouEnqDw`

osi uhlovou rýchlosťou ω tak, že sa snažila vyšplhať hore kopcom. Jakubovia to s úžasom sledovali a hneď sa navzájom spýtali:

a) Aký minimálny koeficient trenia $f_{\rm min}$ musia mať podložky, aby sa guľa začala šplhať nahor?

b) Majme koeficient trenia $f > f_{\rm min}$, pri ktorom sa guľa šplhá nahor naklonenou rovinou. Do akej najväčšej výšky sa guľa môže dostať?

Pomôžte Jakubom s ich ťažkými otázkami! Pri počítaí uvažujte štandardnú bielu homogénnu biliardovú guľu, ktorá má polomer r a hmotnosť m.

Začneme hľadaním odpovede na prvú otázku. Ak má guľa začať šplhať dohora, tak nemôže tlačiť na vodorovnú podložku, takže ju nemusíme uvažovať. Na guľu teda pôsobí len tiažová sila $F_g = mg$, tlaková sila, ktorá je kolmá na naklonenú rovinu $F_{\rm N}$ a trecia sila $F_{\rm t} \leq f F_{\rm N}$.

V hraničnom prípade sa musia tieto sily navzájom kompenzovať tak, aby ich výslednica bola nulová. Dostávame tak 2 rovnice – v smere kolmom na naklonenú rovinu platí

$$F_g \cos\alpha = F_{\rm N}\,,$$

a v pozdĺžnom smere

$$F_g \sin\alpha = F_{\rm t} \leq f F_{\rm N}\,.$$

Dosaďme prvú rovnicu do druhej

$$\begin{aligned} F_g \sin\alpha &\leq f F_g \cos\alpha\,,\\ f &\geq \tan\alpha \quad \Rightarrow \quad f_{\rm min} = \tan\alpha\,. \end{aligned}$$

Druhá otázka je o čosi zložitejšia. Rozoberme si situáciu podrobnejšie. Guľa je na začiatku roztočená, ale má nulovú rýchlosť. To znamená, že bude prešmykovať[7] a trením sa bude znižovať jej uhlová, a teda aj obvodová rýchlosť. No zároveň bude jej ťažisko zrýchľovať smerom nahor pozdĺž naklonenej roviny. Toto sa bude diať až do momentu, kedy sa rýchlosť ťažiska vyrovná obvodovej rýchlosti. Potom sa guľa prestane prešmykovať a bude sa len valiť smerom do kopca. Trecia sila bude pôsobiť stále v smere dohora (ale bude dostatočne malá, aby guľa neprešmykovala) a brzdiaci vplyv tiažovej sily už nevykompenzuje.

Opäť môžeme vychádzať z predchádzajúcich dvoch rovníc pre sily, no v pozdĺžnom smere musíme pridať člen odpovedjúci zotrvačnej sile

$$ma = F_{\rm t} - F_g \sin\alpha\,,$$

čiže po dosadení

$$\begin{aligned} ma &= f mg \cos\alpha - mg \sin\alpha\,,\\ a &= f g \cos\alpha - g \sin\alpha\,. \end{aligned}$$

Vzhľadom na ťažisko má nenulový moment len trecia sila pôsobiaca kolmo na rameno dĺžky R. Spôsobuje spomalenie rotačného pohybu vzhľadom na ťažisko, teda uhlové zrýchlenie ε podľa druhej impulzovej vety

$$\begin{aligned} M &= I_0 \varepsilon\,,\\ -f mg \cos\alpha R &= I_0 \varepsilon\,. \end{aligned}$$

[7] Trecia sila bude konať prácu, a preto nemôžeme použiť zákon zachovania mechanickej energie.

kde $I_0 = \frac{2}{5}mR^2$ je moment zotrvačnosti gule. Prešmykovanie skončí, keď bude rýchlosť ťažiska gule v rovnaká, ako obvodová rýchlosť $R\omega$:

$$\begin{aligned} v &= R\omega\,, \\ at &= R(\omega_0 + \varepsilon t)\,. \end{aligned}$$

Odtiaľ vieme vyjadriť čas, kedy sa to stane, stačí dosadiť za ε

$$t = \frac{R\omega_0}{a - R\varepsilon} = \frac{R\omega_0}{(fg\cos\alpha - g\sin\alpha) - R\left(-\frac{5}{2R}fg\cos\alpha\right)} = \frac{R\omega_0}{g\left(\frac{7}{2}f\cos\alpha - \sin\alpha\right)}\,.$$

Dosiahnutá rýchlosť bude

$$v_{\max} = at = R\omega_0 \frac{f\cos\alpha - \sin\alpha}{\frac{7}{2}f\cos\alpha - \sin\alpha}\,.$$

A do toho momentu prejde dráhu

$$d_1 = \frac{v_{\max}^2}{2a}\,.$$

Po zvyšok dráhy už guľa neprešmykuje, tj. platí $F_{\mathrm{t}} \leq fF_{\mathrm{N}}$ a guľa postupne spomaľuje.

Vzhľadom na bod dotyku má nenulový moment len tiažová sila $M = -mgR\sin\alpha$. Moment zotrvačnosti vzhľadom na tento bod je zo Steinerovej vety[8]

$$I = I_0 + mR^2 = \frac{7}{5}mR^2\,.$$

Pre uhlové zrýchlenie teda dostávame

$$\begin{aligned} I\,\varepsilon' &= -mgR\sin\alpha\,, \\ \varepsilon' &= -\frac{5g}{7R}\sin\alpha\,. \end{aligned}$$

Tomu zodpovedá zrýchlenie ťažiska

$$a' = R\varepsilon' = -\frac{5g}{7}\sin\alpha\,,$$

a dráha do zastavenia

$$d_2 = \frac{v_{\max}^2}{-2a'}\,.$$

Celková vyšplhaná dráha teda je

$$d = d_1 + d_2 = \frac{1}{2}v_{\max}^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) = \frac{R^2\omega_0^2}{2g}\frac{(f\cos\alpha - \sin\alpha)^2}{\left(\frac{7}{2}f\cos\alpha - \sin\alpha\right)^2}\left(\frac{1}{f\cos\alpha - \sin\alpha} + \frac{7}{5\sin\alpha}\right)\,.$$

[8]Steinerova veta nám hovorí, že moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na ľubovoľnú os I je rovný súčtu momentu zotrvačnosti na rovnobežnú os prechádzajúcu ťažiskom I_0 a súčinu jeho hmotnosti a druhej mocniny vzdialenosti osi od ťažiska mR^2.

Tento vzťah upravíme na tangensy, kde si pekne môžeme všimnúť hraničný prípad pre $f = \tan\alpha$, a s využitím jednoduchej geometrie dostaneme maximálnu výšku

$$h_{\max} = d\sin\alpha\,,$$
$$h_{\max} = \frac{R^2\omega_0^2}{2g}\frac{(f-\tan\alpha)^2}{\left(\frac{7}{2}f-\tan\alpha\right)^2}\left(\frac{\tan\alpha}{f-\tan\alpha}+\frac{7}{5}\right).$$

3.6 A3 – Hračka (opravoval Dušan)

Dušan si v jedno nudné popoludnie povedal, že si vyrobí šialene zložitú hračku. Povyťahoval teda zo šuflíkov pružiny, piesty, nádoby, plyny…

Po niekoľkých hodinách práce nová hračka uzrela svetlo sveta. Skladala sa z dvoch identických pružín o tuhostiach k, ktorých jeden koniec bol pripevnený ku podlahe a na druhom boli pripevnené piesty s hmotnosťami m a plochami S. Tieto piesty uzatvárala sklenená U-trubica so vzduchom, ktorá neprepúšťala žiadne častice ani teplo. V rovnovážnom stave mal vzduch v trubici rovnaký atmosferický tlak p_a ako bol tlak okolia, objem V a termodynamickú teplotu T. A teraz to príde… Ako vyzerá všeobecná rovnica malých kmitov jedného piestu, keď ho trochu vychýlime?

Hint: Takáto hračka má dve vlastné frekvencie kmitania a to také, že pri jednej z nich kmitajú piesty súčasne vo fáze a pri druhej v protifáze.

V prvom rade sa zamyslime, čo znamená všeobecná rovnica malých kmitov pre jeden z našich piestov. Mala by to byť rovnica, ktorá bude určovať polohu piestu v čase. Vo všeobecnosti môže byť taký pohyb dostatočne komplikovaný, avšak vieme si ho zjednodušiť tým, že ho vyskladáme z nejakých ľahko popísateľných pohybov.[9] Takže celé riešenie vieme zapísať ako $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$, pričom y_i označujú riešenia triviálnych pohybov sústavy. Ako vám mal hint v zadaní napovedať, tak naša sústava vie vykonávať iba dva takéto triviálne pohyby s takzvanými vlastnými frekvenciami.

Pozrime sa na prvý z nich, keď piesty kmitajú v protifáze. Sily sú v stave pokoja vyrovnané, takže nás bude zaujímať ako sa sily zmenia, keď sa vychýlime o nejaký kúsok y z počiatočnej polohy. Objem plynu v trubici sa pri tomto pohybe nemení, čiže z oboch strán piestu máme atmosferický tlak p_a ako v stave pokoja. Z toho nedostávame nič iné ako to, že tlak vzduchu nám neprispieva k výslednici pôsobiacich síl na piest. Avšak to, čo sa zmení, je sila pružnosti, a to priamo úmerne svojmu vychýleniu. Takto dostaneme pohybovú rovnicu v tvare

$$F = ma = -ky = F_p\,.$$

Riešenie tejto rovnice pre výchylku y nie je až také jednoduché, ako to vyzerá, no výsledok je pomerne známy zo školských učebníc alebo ľahko googliteľný. Takže riešenie môžeme dostať vo viacerých tvaroch a je jedno, ktorý použijeme. Napríklad

$$y_1 = A\sin(\omega_1 t) + B\cos(\omega_1 t) = A\sin(\omega_1 t + \varphi_1)\,,$$

[9] Odborne sa tomu hovorí princíp superpozície riešení, avšak treba si dávať pozor, kedy ho môžeme použiť. V našej úlohe sa zaoberáme kmitaním, ktorého pohyb popisujú lineárne diferenciálne rovnice, pri ktorých je možné aplikovať túto metódu riešenia. Tí, ktorí ste sa ešte s pojmom lineárne diferenciálne rovnice nestretli, nič z toho nerobte. Dôležité je, že práve pre ne platí, že ak x_1 aj x_2 sú riešeniami takejto rovnice, tak aj $Ax_1 + Bx_2$ rieši túto rovnicu (A a B sú konštanty).

pričom A, B a φ_1 vyjadrujú konštanty, ktoré dajú určiť z počiatočných podmienok.[10] Vlastná frekvencia kmitov je

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,.$$

Pohyb s druhou vlastnou frekvenciou je už trochu komplikovanejší. Opäť si predstavme, že vychýlime piest o y. Okrem sily pružniny $F_p = -ky$ nám bude proti pohybu pôsobiť aj sila, ktorá bude spôsobená rozdielom tlakov v trubici a mimo nej. To, ako sa zmení tlak, zistíme až potom, keď určíme, aký termodynamický dej prebieha v trubici. Zamyslíme sa nad tým, čo hovorí zadanie o prepúšťaní častíc a tepla – vidíme, že zadanie popisuje v podstate adiabatický dej. Preň platí $pV^\kappa =$ konšt. Využijeme fakt, že objem sa nám pri kladnej výchylke smerom nahor zmení o $-2Sy$[11] a pre nový tlak dostaneme

$$p = p_a \left(1 + \frac{2Sy}{V - 2Sy}\right)^\kappa .$$

Teraz príde na rad časť s názvom fyzikálna intuícia: začneme zanedbávať a upravovať náš vzorec pre tlak. Zmena objemu oproti pôvodnému je pomerne malá. Avšak, keby sme zanedbali celý zlomok, tak by sme dospeli k tomu, že tlak sa nezmenil a kmitalo by to ako v prvom prípade. To by ale nedávalo fyzikálny zmysel. Urobíme menšie zanebanie: a to, že zanebáme $2Sy$ v menovateli. Súšasne môžeme použiť vzťah vyplývajúci z binomickej vety

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x\,,$$

ktorý platí pre malé x – takže aj tu, keďže sa stále rozprávame o malých kmitoch. Takto teraz pre výslednú silu dostaneme

$$F = -ky + (p_a - p)S = -\left(k + \frac{2\kappa S^2 p_a}{V}\right) y\,.$$

Dostali sme úplne rovnakú pohybovú rovnicu ako v prvom prípade, akurát vlastná frekvencia je teraz

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + \frac{2\kappa S^2 p_a}{V}}{m}}\,.$$

Tak a prichádza veľké finále, všeobecná rovnica pohybu piestu je

$$y = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_1\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k + \frac{\kappa 2 S^2 p_a}{V}}{m}} t + \varphi_2\right) .$$

Ak by sme skúmali konkrétnu hračku a vedeli by sme, aké boli počiatočné podmienky, tak už by sme jednoducho dorátali všetky konštanty a z našej všeobecnej rovnice by sa stala rovnica pre jeden konkrétny pohyb.

[10] Všimnite si, že vždy sú iba dve a najčastejšie ich určujeme z počiatočnej výchylky a rýchlosti.

[11] Tá 2 je tam kvôli tomu, že sa piesty hýbu rovnakým smerom.

3.7 A4 – Tancujúci pozitrón (opravoval Kubo)

Predstavme si vesmír, v ktorom sa nachádza len jeden jediný pozitrón stojaci uprostred prázdna. Preto jeho polohu prehlásime za počiatok súradnicového systému. Aby mu nebolo smutno, zapneme mu elektrické pole v smere osi y s veľkosťou $E = 100\,\mathrm{V/m}$ a magnetické pole v smere osi z s veľkosťou $B = 0{,}1\,\mathrm{T}$. Pozitrón začne vykonávať čarovné pohyby. Nás by však zaujímalo:

- Akú najmenšiu y-ovú súradnicu pozitrón dosiahne? Zdôvodnite aj, akú bude mať v tomto bode pozitrón rýchlosť a prečo nemôže dosiahnuť menšiu y-ovú súradnicu.
- Akú najväčšiu y-ovú súradnicu pozitrón dosiahne?
- Aká je perióda pohybu pozitrónu?

Začnime tým, že si napíšeme, aké všetky môžné sily v danom elektromagnetickom poli môžu pôsobiť na nabitú časticu s nábojom q (používame anotáciu, kde tučné veličiny vyjadrujú vektory):

$$\mathbf{F_e} = q\mathbf{E}\,,$$
$$\mathbf{F_m} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,.$$

Vidíme, že sú dokopy iba dve: Elektrická sila $\mathbf{F_e}$ a magnetická sila $\mathbf{F_m}$. S týmto sympatickým zistením sa môžeme pustiť do popisu pohybu pozitrónu v tomto poli.

Keďže poznáme všetky pôsobiace sily, tak podľa 2. Newtonovho zákona vieme ľahko napísať, ako sa v čase mení rýchlosť pozitrónu:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{F_e} + \mathbf{F_m}}{m} = \frac{q}{m}\left(\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}\right)\,.$$

Zrejme bude výhodné, keď získame lepšiu predstavu o tom, ako vyzerá vektorový súčin $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ v našom konkrétnom prípade, kde $\mathbf{B} = \mathbf{B_z}$:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Teraz už môžeme rovnicu pre celkové zrýchlenie pozitrónu pohodlne „rozbiť“ na 3 diferenciálne rovnice:[12]

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}(v_y B)\,, \tag{1}$$
$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}(-v_x B + E)\,, \tag{2}$$
$$a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = 0\,. \tag{3}$$

[12] Pojmu *diferenciálna rovnica* sa netreba báť. Takéto rovnice vlastne len hovoria, ako závisia rýchlosti zmien nejakých veličín od veličín samotných: v našom prípade to sú zrýchlenia pozitrónu v daných smeroch závislé od jeho rýchlostí.

Z rovníc jasne vidno 2 veci. Prvou je, že pozitrón nikdy nezmení svoju z-ovú súradnicu (pretože v_z má nulovú hodnotu, ktorá sa ani nikdy nezmení). Druhou je, že rovnice (1) a (2) sú previazané cez derivácie polôh v rôznych rádoch, z čoho zatiaľ nevieme povedať vôbec nič.

V tomto vzorovom riešení si ukážeme dokopy až 3 metódy, ako dospieť k odpovediam na otázky v zadaní. Prvý spôsob bude spočívať v prostom **nasimulovaní pohybu** nejakým schopným programom (napr. C++). Druhý bude využívať poznatky zo **zákona zachovania energie** a tretí spôsob bude založený na **priamom riešení diferenciálnych rovníc**. Všetky tri prístupy majú svoje výhody aj nedostatky, ktoré si na záver zhrnieme.

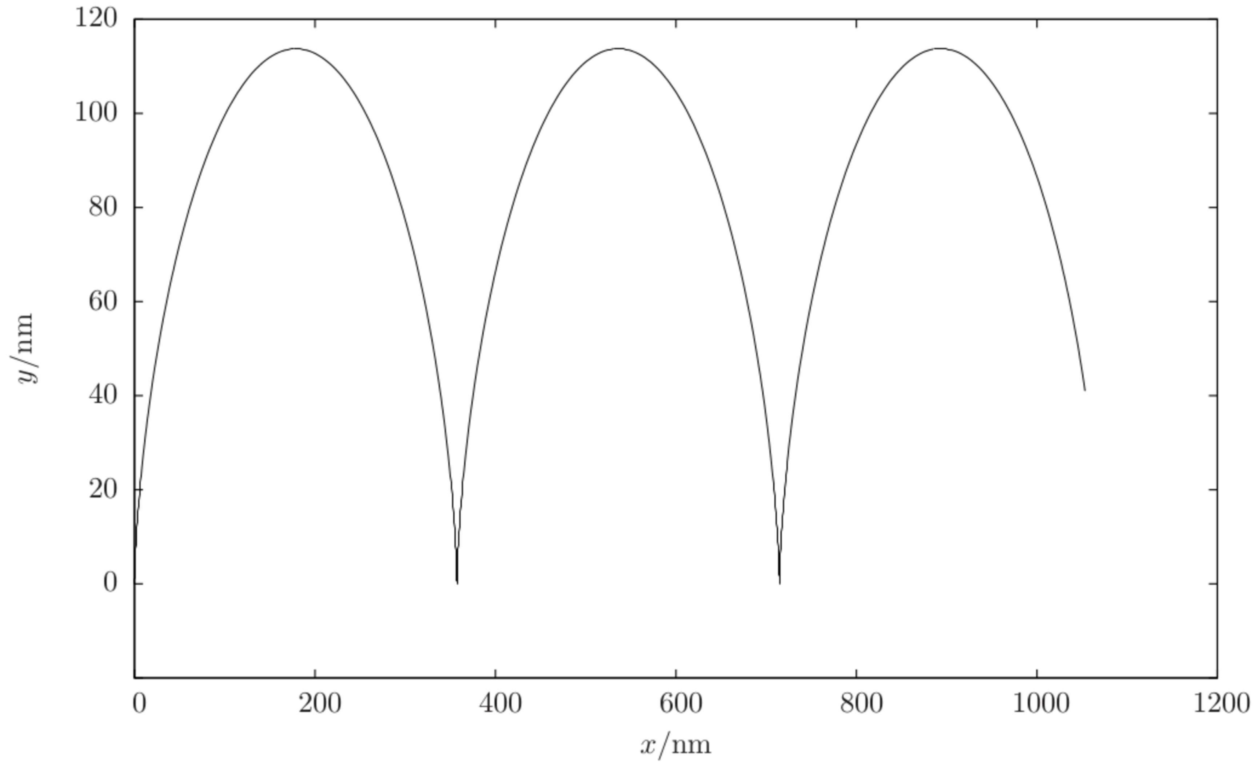
Simulácia

Ako tomu vždy bývalo, numerická simulácia spočíva v tom, že si celý priebeh rozdelíme na maličké časové úseky, pričom si budeme zapisovať alebo vykresľovať po každom takomto časovom úseku momentálne rýchlosti a polohy, ktoré sa rekurzívne sčítavajú. Do algoritmu, ktorý necháme prejsť dostatočne veľakrát len prepíšeme diferenciálne rovnice (1) a (2). Aby sme šetrili slovami, tak uvádzame zdrojový kód takého (funkčného) programu v jazyku C++, ktorému by skúsenejšie programátorské oko malo rozumieť:

```
#include<iostream>
#include<cmath>
#include<fstream>
#include <cstdlib>
using namespace std;
int main()
{
        ofstream fout("pozitron.dat");

        double q=1.602*pow(10, 19);
        double m=9.11*pow(10, 31);
        double E=100;
        double B=0.1;
        double x=0;
        double y=0;
        double vx=0;
        double vy=0;
        double ax=0;
        double ay=0;
        double dt=pow(10, 14);

        for (int i=0;i<=100000;i++)
                {
                        ax=(q/m)*(vy*B);
                        ay=(q/m)*( vx*B+E);

                        vx+=ax*dt;
                        vy+=ay*dt;

                        x+=vx*dt;
                        y+=vy*dt;
                        fout << x << "\t" << y <<endl;
                }
```

```
        fout.close();
        system("wgnuplot␣ persist␣ e␣\"plot␣'pozitron.dat'␣with␣lines\"");
}
```

Aby nám program korektne zbehol, museli sme mu povedať, že všetky súradnice aj rýchlosti pozitrónu na začiatku boli nulové. Najťažšou úlohou však bolo nájsť dostatočne malý časový úsek dt a k nemu dostatočne veľký počet opakovaní cyklu i, pre ktoré nám program nevykreslil rovnú čiaru (intuitívne tušíme, že by to malo byť niečo zakrivené). Metódou pokus-omyl sme našli vhodné d$t = 10^{-14}$ s a $i = 10^5$, kedy nám *gnuplot* načrtol pomerne vierohodnú trajektóriu, ktorú vidíme na obrázku 3. Z jej dát je už ľahké určiť periódu T a minimálne aj maximálne y, ktoré pozitrón dosiahne.



Obr. 3: Priebeh trajektórie pozitrónu

Metóda zachovania energie

Tak, ako všade inde, tak aj v tomto vesmíre musí platiť zákon zachovania energie. Napísať ho nie je vôbec ťažké, pretože jediná vec, čo sa tu s energiami deje je to, že raz koná prácu pole na pozitróne, čím mu dodáva kinetickú energiu a raz koná prácu samotný pozitrón, aby sa dostal do miesta s vyšším potenciálom.[13]

Práca poľa na častici sa dá inak povedať aj ako *zmena potenciálnej energie častice*. V našom prípade je táto zmena záporná vtedy, keď pozitrón cestuje do miest s nižším potenciálom

[13]Magnetické pole v tomto prípade nehrá žiadnu rolu. Rýchlosť žiadnej nabitej častice nikdy nemení, iba zakrivuje jej trajektóriu. Preto magnetické pole vo všeobecnosti prácu nekoná.

(rozmyslite si prečo). Súčet týchto energií musí byť v každom čase konštantný (energia sa zachováva), čo môžeme zapísať ako

$$E = E_\mathrm{k} - \mathbf{F_e} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}mv^2 - Eqy = \text{konšt.} \tag{4}$$

Navyše dokonca vieme povedať, že táto konštanta sa identicky rovná nule, pretože v nulovom čase sa pozitrón nachádza v nulovej vzdialenosti od počiatku s nulovou rýchlosťou. Toto zistenie nám umožňuje vyjadriť závislosť rýchlosti pozitrónu od jeho y-ovej súradnice:

$$v = \sqrt{\frac{2Eq}{m}y}\,.$$

Z energetických úvah vieme okamžite povedať, že najmenšia y-ová súradnica, akú pozitrón vôbec môže dosiahnuť, musí byť $y_\mathrm{min} = 0\,\mathrm{m}$, pretože ak by sa chcel dostať nižšie, než pôvodne začínal, tak by musel vlastniť energiu navyše (ktorú nemá), vďaka ktorej by mohol prekonať potenciálový rozdiel.

O y_max už toho toľko povedať hneď nevieme, pretože tá výrazne závisí na magnetickej indukcii $\mathbf{B}$. V tomto prípade nám výrazne pomôže prvá diferenciálna rovnica (1), ktorá nám hovorí, ako rýchlo sa mení rýchlosť pozitrónu v x-ovom smere v_x voči rýchlosti v y-ovom smere. Táto rýchlosť zároveň vyjadruje časovú zmenu súradnice y

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,.$$

Takzvaným *znížením rádu* vieme vyjadriť závislosť v_x od y ako:

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{qB}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \longrightarrow \qquad v_x = \frac{qB}{m}y\,.$$

V okamihu dosiahnutia y_max má pozitrón nulovú hodnotu v_y, čiže celá kinetická energia má v tom momente hodnotu $\frac{1}{2}mv_x^2$. Tým pádom sme oprávnení napísať rovnosť

$$\sqrt{\frac{2Eq}{m}y_\mathrm{max}} = \frac{qB}{m}y_\mathrm{max}\,,$$

odkiaľ už po jednoduchej úprave dostávame hľadané

$$y_\mathrm{max} = \frac{2mE}{qB^2}\,.$$

Čo sa týka rýchlostí, tak v bode y_min má pozitrón nulovú celkovú rýchlosť (pretože nemá žiadnu kinetickú energiu) a v bode y_max má nulovú iba v_y, pričom

$$v_x = \sqrt{\frac{2Eq}{m}y_\mathrm{max}} = \frac{2E}{B}\,.$$

Periódu T už žiaľ z čisto energetických úvah určiť nevieme. Tu si to už vyžaduje aspoň v malej miere priamo riešiť pohybové rovnice.

Metóda vyriešenia diferenciálnych rovníc

Keď sa poriadne zahľadíme na rovnice (1) a (2), môžme si všimnúť, že z nich vieme vyrobiť dve nové diferenciálne rovnice. A to tak, že jednu z nich zderivujeme a dosadíme do druhej. Keď takýto postup aplikujeme v oboch smeroch, tak dostávame pre v_x aj v_y rovnicu harmonických kmitov s riešeniami[14]

$$v_x(t) = -v\cos(\Omega t) + \frac{E}{B}\,, \tag{5}$$

$$v_y(t) = v\ \sin(\Omega t)\,, \tag{6}$$

pričom uhlová rýchlosť pohybu pozitrónu je rovná

$$\Omega = \frac{qB}{m}\,.$$

V predošlých dvoch rovniciach je v maximálna rýchlosť (amplitúda) v y-ovom smere, ktorú môže pozitrón dosiahnuť.

Ak má navyše platiť podmienka, že na začiatku (tj. v nulovom čase) je rýchlosť pozitrónu nulová $v_x(t=0)=0$, tak nutne musí z prvej z rovníc pre amplitúdu rýchlosti v platiť, že

$$v = \frac{E}{B}\,.$$

Konštantný člen E/B vo výraze (5) napravo sa nazýva *driftová rýchlosť* a väčšinou sa stretnete s označením $\mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}$ drift.

Tento drift je zaujímavý tým, že vôbec nezávisí na hmotnosti ani náboji častíc, ale iba čisto od intenzity elektromagnetického poľa. Vo všeobecnom elektromagnetickom poli, kde vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ nemusia byť na seba kolmé, môžme túto rýchlosť vyjadriť ako

$$\mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{B^2}\,.$$

Z toho vidíme, že vektor driftovej rýchlosti je vždy kolmý na obe polia. Táto informácia nám výrazne pomôže v predstave o pohybe pozitrónu. Aby sme si konečne mohli nakresliť, ako vyzerá jeho trajektória pohybu, tak bude výhodné dopočítať závislosti polohy od času, a to zintegrovaním rovníc (5) a (6):

$$x(t) = \int v_x\,\mathrm{d}t = \int \left(-v\cos(\Omega t) + \frac{E}{B}\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{v}{\Omega}\sin(\Omega t) + \frac{E}{B}t + C_1\,,$$

$$y(t) = \int v_y\,\mathrm{d}t = v\ \int \sin(\Omega t)\,\mathrm{d}t = -\frac{v}{\Omega}\cos(\Omega t) + C_2\,.$$

Hodnoty integračných konštánt C_1 a C_2 získame z počiatočných podmienok $x(0)=y(0)=0$. Ich hodnoty sú teda

$$C_1 = 0 \qquad C_2 = \frac{v}{\Omega}\,.$$

[14] Všetky kroky úprav diferenciálnych rovníc sú zámerne vynechané s cieľom minimalizovať vaše znechutenie.

Keby sme si pohyb s takýmto časovým vývojom vykreslili v nejakom kalkulátore (Excel a pod.), tak dostaneme rovnaký graf ako v prípade, kedy sme pohyb iba simulovali v programe (čo je dobré znamenie, že naše úpravy neboli zlé).

Zo závislosti $y(t)$ vidno, že pozitrón pravidelne dosahuje svoje maximum y_{max} aj minimum y_{min}. Vždy, keď dosiahne jeden z týchto extrémov, tak je zrejme jeho vertikálna rýchlosť v_y nulová:

$$v_y = v\sin(\Omega t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \Omega t = k\pi\,.$$

Túto podmienku môžeme dosadiť do závislosti $y(t)$ a podľa *parity* k rozlíšiť dva extrémy:

$$y = -\frac{v}{\Omega}\cos(k\pi) + \frac{v}{\Omega} = \begin{cases} k\,\text{párne} & \longrightarrow \quad y = y_{\mathrm{min}} = 0\,, \\ k\,\text{nepárne} & \longrightarrow \quad y = y_{\mathrm{max}} = 2\frac{v}{\Omega} = \frac{2\frac{E}{B}}{\frac{qB}{m}} = \frac{2mE}{qB^2}\,. \end{cases}$$

Rýchlosť pozitrónu v momente dosiahnutia jedného z extrémov dopočítame dosadením párneho alebo nepárneho násobku $k\pi$ za Ωt do rovníc (5) a (6). Pre y_{min} je to $v_x = v_y = 0$ a pre y_{max} to je $v_x = 2E/B$ a $v_y = 0$.

Ak už poznáme uhlovú rýchlosť kmitavého pohybu Ω, tak dopočítať periódu (alebo čas, za ktorý vykoná pozitrón jeden oblúčik) je už malina:

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi m}{qB}\,.$$

Záver

Ako už bolo na začiatku sľúbené, zhrňme si všetky naše dojmy z rôznych prístupov k riešeniu:

- *Metóda numerického simulovania* je zrejme najrýchlejšia cesta na zistenie hľadaných hodnôt (ak poznáme všetky potrebné parametre), no veľa fyzikálneho ponaučenia do života neprináša.
- *Metóda zachovania energie* síce bola omnoho rýchlejšia a využívala pomerne zaujímavé úvahy, ale nebola schopná odpovedať na všetky otázky a o samotnom pohybe nevedela povedať zhola nič.
- *Metóda riešenia diferenciálnych rovníc* bola zo všetkých najdlhšia a asi aj najnesympatickejšia, ale zato poskytla informácie úplne o všetkom (navyše odkryla tajomstvo $\mathbf{v}_{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}$ *driftov*).

Je už teda každého osobná vec, ktorý postup mu poskytne toľko informácii o celej situácii, koľko by sám chcel poznať. :-)

Aby sme nezabudli na konkrétne hodnoty výsledkov:

$$y_{\mathrm{min}} = 0\,\mathrm{m}\,, \qquad y_{\mathrm{max}} \approx 1{,}14\cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}\,, \qquad v_x(y_{\mathrm{max}}) = 2\,000\,\mathrm{m/s}\,, \qquad T \approx 3{,}58\cdot 10^{-10}\,\mathrm{s}\,.$$