



Fyzikálny korešpondenčný seminár

30. ročník, 2014/2015

FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava

e-mail: otazky@fks.sk

web: <http://fks.sk>

Vzorové riešenia 2. kola letnej časti 2014/2015

Na to, aby boli naše vzoráky a príklady lepšie, rozhodne potrebujeme feedback. Kľúčový je aj ten tvoj, preto ťa prosíme o vyplnenie ankety na fks.sk/anketa/seria.

2.1 B0 – Malý Lomonosov (opravovala Zuzka)

Na základškolskej hodine chémie sme sa učili, že mólová hmotnosť (počet gramov na jeden mól látky) sa číselne rovná relatívnej atómovej hmotnosti (zhruba počet nukleónov). Prečo je to vlastne tak? A platí to vôbec vždy? Porovnajme relatívne atómové hmotnosti prvkov v tabuľkách s počtom ich nukleónov.

Podme sa najprv pozrieť na prvé z dvoch načrtnutých problémov. Prečo sa relatívna atómová hmotnosť číselne rovná molovej hmotnosti? Aby sme to zistili, musíme si uvedomiť, ako sú tieto dve veličiny definované.

Relatívna atómová hmotnosť je podiel absolútnej atómovej hmotnosti, teda to, koľko atóm daného prvku naozaj váži, a takzvanej atómovej hmotnostnej konštanty, ktorá je definovaná ako jedna dvanástina hmotnosti atómu uhlíka ^{12}C . Teda:

$$A_r = \frac{m_A}{u} = \frac{m_A}{m_A(\text{C})/12}.$$

Molová hmotnosť zas predstavuje súčin absolútnej atómovej hmotnosti a Avogadrovej konštanty, ktorá predstavuje počet častíc v jednom mole látky alebo počet častíc v dvanástich gramoch uhlíka ^{12}C . Vieme ju vyjadriť:

$$M_m = m_A N_A = m_A \frac{12\text{g}}{m_A(\text{C})}.$$

Teraz si z týchto dvoch vzťahov vyjadríme $m_A(\text{C})$ a dajme to do rovnosti. Vypadne nám z toho:

$$A_r \frac{m_A \cdot 12\text{g}/M_m}{12} = m_A.$$

Generálny partner



Partneri



PosAm



Mediálny partner



Z čoho po úprave dostaneme:

$$A_r g = M_m .$$

Teraz by sa nám mohlo zdať, že je to predsa hlúposť, pretože nám nesedia jednotky. V takom prípade si stačí uvedomiť, že 1 mol je vlastne len krajšie vyjadrený počet častíc a táto jednotka je dobrá len na to, aby sme nemuseli zapisovať obrovské čísla. Je predsa ľahšie napísať 1 mol ako $6,022 \cdot 10^{23}$ častíc, nie?

A teraz ten druhý problém. Relatívne atómové hmotnosti jednotlivých prvkov v tabuľke sa podozrivo podobajú na ich nukleónové čísla. Prečo? Tak sa najprv spýtajme, ako sa dostaneme k absolútnej hmotnosti atómu inak ako cez jeho relatívnu hmotnosť. Väčšinu hmotnosti atómu tvoria nukleóny – teda protóny a neutróny v jadre. Elektróny v atómovom obale majú asi tisíckrát menšiu hmotnosť ako nukleóny, preto ich môžeme s pokojným svedomím zanedbať. V skutočnosti sa neskôr dozvieme, že aj samotná energia väzby medzi neutrónmi a protónmi v jadre prispieva k nami merateľnej hmotnosti jadra.¹ Absolútnu hmotnosť atómu teda vieme zistiť súčtom hmotností jeho protónov a neutrónov, ktoré sú približne rovnaké – $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg. Keď chceme zistiť relatívnu hmotnosť atómu, musíme tento údaj vydeliť už spomínanou atómovou hmotnostnou konštantou. Tú môžeme chápať ako priemernú hmotnosť nukleónu, keďže je to hmotnosť jedného atómu uhlíka ^{12}C delená dvanástimi a tento uhlík má dvanásť nukleónov. Výsledkom teda je počet nukleónov vynásobený ich hmotnosťou (to zodpovedá absolútnej atómovej hmotnosti) a vydelený hmotnosťou nukleónu (atómová hmotnostná konštanta). Hmotnosť nukleónu nám z výrazu vypadne, teda sa to približne rovná počtu nukleónov daného atómu. Tadá :).

2.2 B1 – Chladí a nechladí (opravoval Kvík)

Čajka nedávno na sebe spozorovala zaujímavý jav.² Najprv doširoka otvorila ústa a pomaly fúkla vzduch na ruku. Pritom pocítila, že vzduch je pomerne teplý. No potom pery našpúlila ako kačička a znovu si na ruku fúkla z rovnakej vzdialenosti, no tentoraz na ruke pocítila chlad. Ako je možné, že rovnako teplý vzduch z jej pľúc pocítila raz ako teplý a raz ako studený?

Za bežných okolností platí, že izbová teplota je nižšia, než teplota povrchu Čajkinej ruky, a tá je zase nižšia, než teplota jej dychu. Rozdiely sú v oboch prípadoch asi rovnaké – realistické hodnoty sú napríklad 23°C , 30°C a 37°C . Vzduch je mizerný vodič tepla³ a zároveň má veľmi malú tepelnú kapacitu.

Ak na Čajkinu ruku práve nič nefúka, tenká vrstvička vzduchu, ktorý je v priamom kontakte s jej kožou, sa okamžite zahreje na rovnakú teplotu, akú má aj povrch ruky a Čajke potom nie je zima, aj keď je vzduch v izbe omnoho chladnejší, než je jej telesná teplota. Keby sa však ponorila do rovnako teplej vody, ktorá má oveľa väčšiu tepelnú kapacitu, hneď by začala jajčať – jej koža by sa ochladzovala oveľa rýchlejšie.

¹Skúste sa pozrieť na nejaký atóm a zistíte, že jeho hmotnosť je menšia ako súčet hmotností protónov a neutrónov, z ktorých sa skladá. Dôvodom je známe, $E = mc^2$. Istá časť hmotnosti nukleónov sa „spotrebuje“ na vytvorenie väzby medzi nimi.

²Nie, nebolo to vysokofrekvenčné trasenie jej nozdier.

³Pokiaľ ide o kondukciu, teda šírenie tepla bez prúdenia (to už vzduchu ide veľmi dobre). Preto, ak chceme vzduchom tepelne izolovať, musíme mu zabrániť v pohybe – napríklad ho uväzniť do bubliniek penového polystyrénu.

Takže: pri výdychu široko otvorenými ústami vytvorila Čajka hrubý a pomalý prúd teplého a vlhkého vzduchu. Takéto prúdenie je hladké, *laminárne*: keď sa pozrieme na ľubovoľné dve častice, ktoré boli na začiatku pohybu blízko seba, ich vzájomná poloha sa bude počas pohybu meniť len máličko. Takýto prúd sa takmer nepremiešava, chladne iba na svojich okrajoch, kde sa rýchle molekuly z pľúc zrážajú s pomalšími molekulami okolitého vzduchu, ale jeho stred si teplotu bude udržiavať dlhšie. Pravda, naše „dlhšie“ stále znamená len pár sekúnd, ale kým prúd dorazí k ruke, nestihne sa príliš zmiešať s okolitým chladným vzduchom a Čajka pocíti na svojej ruke vlastné teplo.

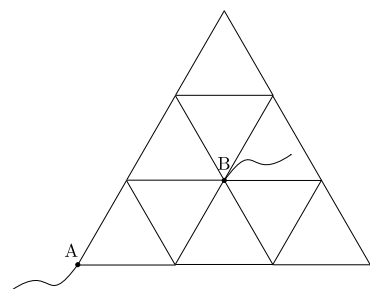
Naopak, keď si Čajka na ruku fúkla s našpúlenými perami, z úst jej vyšiel tenký prúd vzduchu, avšak oveľa väčšou rýchlosťou. Takéto prúdenie už nie je laminárne, ale chaotické, tzv. *turbulentné*. Pohybujúci sa vzduch vytvára komplikované víry a strháva so sebou okolitý chladný vzduch. Vo víroch sa teplý a studený vzduch ochotne miešajú a ich teplota sa prakticky okamžite vyrovnáva. Celková hybnosť sa však musí zachovať, takže na Čajkinu ruku doletí veľké množstvo ochladeného vzduchu, ktoré rozruší tenkú prehriatu vrstvičku okolo nej a Čajka cíti chlad. Keď fúkať prestane, vzduch veľmi rýchlo znovu zastane a opäť sa prehreje od ruky, takže o dve sekundy už Čajka zase nič necíti. Našpúlené pery navyše kladú omnoho väčší odpor, takže prietok a celkové množstvo preneseného tepla budú podstatne menšie, než v prvom prípade.

Druhým (menej dôležitým, avšak stále merateľným) vplyvom je vyparovanie vody z povrchu kože. Vzduch z pľúc býva omnoho vlhší, než izbový, takže môže absorbovať menej vody a vyparovanie je pomalšie. Rovnakou argumentáciou ukážeme, že aj tento chladiaci efekt je výrazne silnejší pri fúkaní, ako pri vydychovaní.

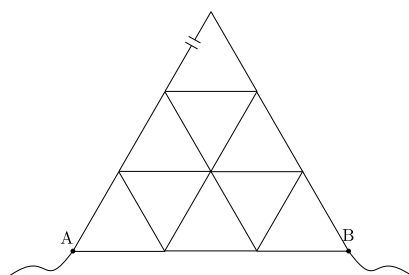
Nakoniec si skúste rozmyslieť, čo by sa zmenilo, keby sme Čajku zatvorili do sauny, kde je 120°C a nechali ju experiment opakovať tam.

2.3 B2 – Nielen LED stromček (opravoval Paťo)

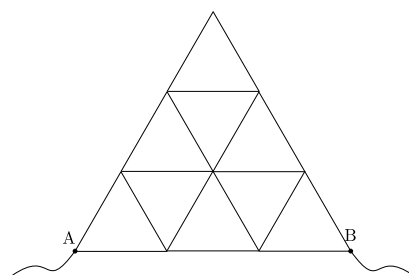
Maťo si vo voľnom čase zdobí izbu osvetlením z LED pásikov. Vo vianočnej edícii si z nich poskladal trojuholníkový stromček a skúšal rôzne spôsoby zapojenia k zdroju napätia. Aký odpor nameral v ustálenom stave v nasledujúcich prípadoch medzi bodmi **A** a **B**, keď každý pásik má odpor R ? Pozor, v druhom zapojení si Maťo zmyslel, že jeden pásik nahradí kondenzátorom. Pri riešení druhej a tretej schémy sa vám môže zísť *transformácia hviezda-trojuholník*.⁴



Obr. 1: Prvé zapojenie.



Obr. 2: Druhé zapojenie.



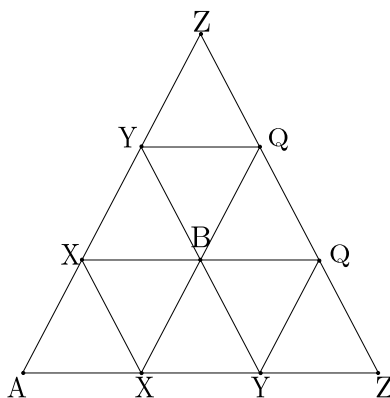
Obr. 3: Tretie zapojenie.

⁴Viac o nej môžete nájsť v starších príkladoch FKS alebo na <http://goo.gl/fi6Wb3>

Prvé zapojenie Už pri letmom pohľade na zapojenie si môžeme všimnúť, že celé zapojenie je vzhľadom na body A a B nejaké symetrické. Áno, znamená to, že ideme hľadať body s rovnakým potenciálom.

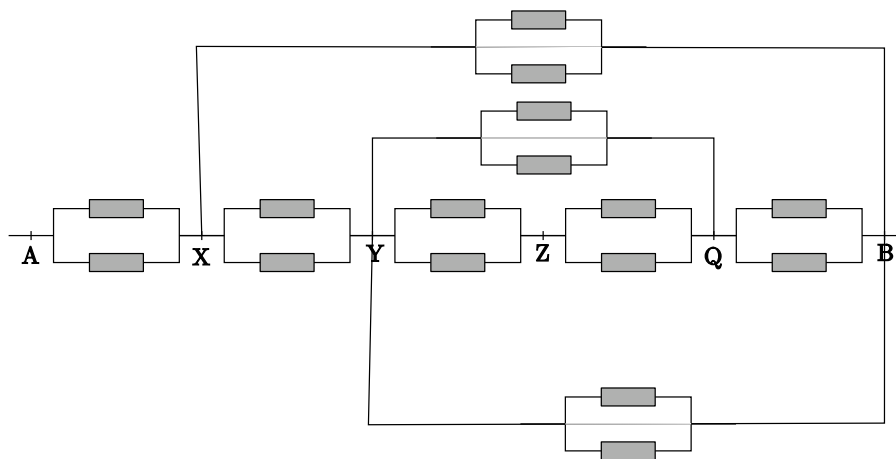
Zo stredkoškolskej definície napätia vieme, že napätie medzi nejakými bodmi je rozdiel ich potenciálov. Takže, ak majú dva body rovnakú hodnotu potenciálu, napätie medzi nimi je nulové. Ak by sme teda tieto dva body spojili vodičom, z Ohmovho zákona týmto vodičom nebude aj tak tiecť žiaden prúd.

Tieto *ekvipotenciálne* body nájdeme najjednoduchšie pomocou symetrie – ak je elektrický obvod medzi bodmi, v ktorých do neho vteká a vyteká prúd (v našom prípade A a B) symetrický, odpovedajúce si body budú mať rovnaký potenciál. V našom prípade vieme nájsť 4 dvojice ekvipotenciálnych bodov, ktoré si označíme X, Y, Z a Q (viď obr.4). A prečo sme tie body nazvali rovnako? Predstavme si, že si zoberieme vodič a každú dvojicu bodov spojíme (vodičom aj tak nepotečie prúd). Potom vodič skrátime tak, že každá dvojica bodov splynie z pohľadu elektrickej schémy do jedného bodu.



Obr. 4: Schéma s vyznačenými ekvipotenciálnymi bodmi

Následne si schému prekreslíme tak, že si na papier nakreslíme všetky body a začneme ich spájať rezistormi. Ak sú nejaké dva body spojené viac, ako jedným rezistorom (napríklad bod A je spojený s bodom X dvomi cestami), toto zapojenie do náhradnej schémy zapíšeme ako paralelné zapojenie (viď obr.5).



Obr. 5: Prekreslená schéma z obr.4

Dostávame tak jednoduchý obvod, ktorý vieme riešiť klasickým postupom zjednodušovania. Paralelné zapojenie medzi bodmi Y a Q má odpor

$$r_{YQ} = \frac{2r \cdot r}{2r + r} = \frac{2r}{3},$$

kde $r = R/2$ je odpor jednej dvojice paralelných rezistorov. Tým pádom má vetva za bodom Y odpor

$$r_{YB} = \frac{r \cdot \left(\frac{2}{3}r + r\right)}{r + \frac{2}{3}r + r} = \frac{5r}{8}.$$

No a celkový odpor medzi bodmi A, B je

$$r_{AB} = r + \frac{\left(r + \frac{5}{8}r\right) \cdot r}{r + \frac{5}{8}r + r} = r + \frac{13r}{21} = \frac{34r}{21}.$$

Kedže ale $r = R/2$, je odpor medzi bodmi A,B rovný

$$R_{AB} = \frac{34}{21} \frac{R}{2} = \frac{17R}{21} \approx 0,81R.$$

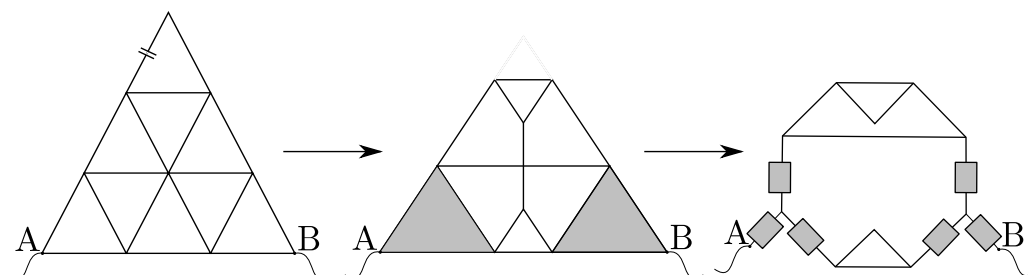
Druhé zapojenie Symetria tomuto zapojeniu zjavne chýba – prúd tečie nesymetricky „doprava“. Prvou správou je, že (v závislosti na kapacite kondenzátora) sa kondík nabije tak, že ním nebude pretekať žiaden prúd – vrchný cíp obvodu preto nemusíme ďalej uvažovať.

Druhá správa je, že v riešení budeme potrebovať použiť transformáciu trojuholník-hviezda. Táto transformácia funguje tak, že ak máme trojuholník XYZ tvorený rezistormi s odporom R , úplne rovnako sa bude správať⁵ hviezdicovité zapojenie s odpormi $r = R/3$ (vyskúšajte si to).

Okrem tohto mocného nástroja použijeme ešte jeden „trik“. Na uzol v strede zapojenia X sa môžeme pozerať ako na vodivé spojenie troch uzlov: dvoch uzlov vo vrcholoch trojuholníkov a uzlu v strede strednej pričky. Všetky tieto uzly sa nachádzajú „v strede“ medzi bodmi A a

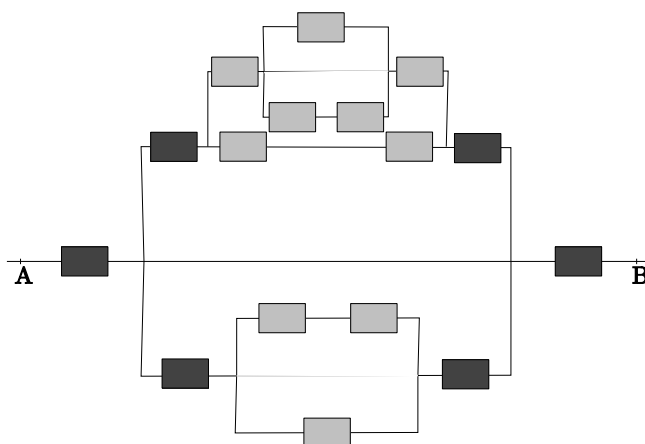
⁵To znamená, že hodnota odporu medzi každými dvomi vrcholmi bude aj po transformácii rovnaká.

B. Zo symetrie celého obvodu preto môžeme povedať, že potenciál na všetkých troch bodoch je rovný polovici napätia medzi bodmi A a B (korektnejšie: potenciál uzlov je priemer potenciálu bodu A a bodu B). Keďže ale *všetky* tieto body majú rovnaký potenciál, hypotetické vodiče oddeľujúce uzly aj tak nebudú viesť žiaden prúd – preto ich drzo rozstrihnime. Obvod, ktorý vďaka tomu dostaneme, ešte nie je riešiteľný priamo – prekážajú nám v tom trojuholníky pri bodoch A a B (sivé). Preto na tieto „rohy“ použijeme transformáciu na hviezdu.



Obr. 6: Prekreslenie zapojenia s využitím všetkého, čo už vieme

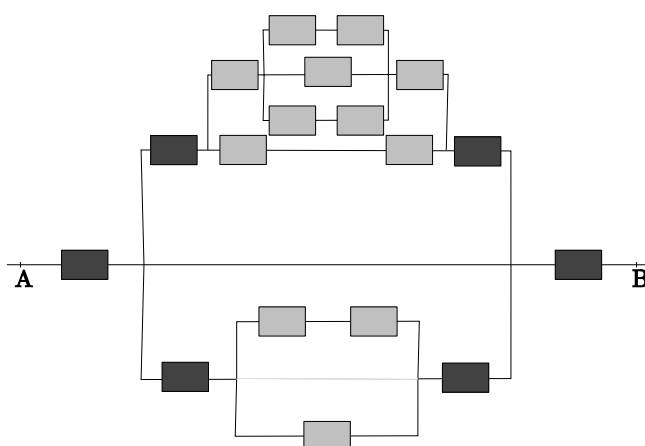
Teraz nám už nič nebráni si toto zapojenie takto prekresliť:



Obr. 7: Zjednodušená schéma druhého zapojenia. Tmavé rezistory majú odpor $R/3$.

Po zjednodušení a dopočítaní tohto riešiteľného obvodu sa dopracujeme k hodnote odporu $R_{AB} = 182R/135 \approx 1,348R$.

Tretie zapojenie Toto zapojenie je, ako už isto tušíte, takmer navlas rovnaké ako druhé zapojenie, akurát navyše s dvojicou rezistorov, ktoré ale nijak nezmenia postup riešenia. Po triviálnom započítaní týchto rezistorov nám vyjde $R_{AB} = 230R/171 \approx 1,345R$.



Obr. 8: Rezistorová schéma tretieho zapojenia

Vidíme teda, že ak kondenzátorom „odpojíme“ nejaké vzdialenejšie zákutia elektrických obvodov, na celkový odpor zapojenia to bude mať len malý vplyv.

2.4 B3/A1 – Ti brzdí? (opravoval Samašec)

Samec má pocit, že jeho bicykel pri voľnobehu spomaľuje viac, než by mal. Rozhodol sa preto jeho brzdenie zmerať. Aby mohol svoje výsledky porovnať, zmerajte brzdenie bicykla aj vy! Otočte bicykel hore nohami, roztočte jeho koleso a namerajte (napríklad pomocou programu *Tracker*) zastavovanie roztočeného kolesa v čase, konkrétne závislosť uhlovej pozície nejakého pevného bodu na kolese (napr. odrazky) v čase. Ak nemáte doma bicykel, tak to skúste s iným kruhovým predmetom otáčajúcim sa okolo pevnej osi. Zo získanej závislosti nakoniec zistíte závislosť uhlového zrýchlenia v čase.

Na určenie rýchlosti a zrýchlenia v čase exportujte dáta z *Trackeru* do nejakého tabuľkového procesora (*Excelu* alebo *OpenCalcu*) a ďalšie výpočty už robte priamo v nich. Rýchlosť určte na základe dvoch nasledujúcich uhlových pozícií φ_i a φ_{i+1} ako

$$\omega_{i+1} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta t}.$$

Podobne postupujte aj pre zrýchlenie.

Aby ste získali relevantné dáta, tak sa pokúste experiment opakovať aspoň 10-krát. Pri spracovaní nezabudnite na základe vami zistených údajov vypočítať pre každý bod v čase smerodajnú odchýlku⁶ (využite tabuľkový procesor). Nezabudnite, že na začiatku vami vybraného úseku môže mať koleso bicykla rôznu rýchlosť, a preto pri počítaní smerodajnej odchýlky pre jednotlivé body musíte v tabuľkovom editore posunúť dáta z rôznych meraní tak, aby malo koleso na začiatku približne rovnakú rýchlosť.

Ako prvé musíme vymyslieť, ako budeme sledovať uhlovú pozíciu nejakého bodu. Zadanie nám odporúča použiť bicyklovú odrazku. Okrem toho by sa zišiel čo najlepší snímací nástroj – my sme napríklad zohnali fotoaparát, ktorý dokáže snímať 240 snímkov za sekundu.

Ostáva nám obrátiť bicykel hore nohami (kolesami), vhodne nastaviť foťák, roztočiť koleso a natočiť aspoň 10 videí.

Keďže našim cieľom je zmerať časový priebeh uhlovej rýchlosti, musíme zistiť, ako dlho trvalo nejakému bodu na kolese (začiatok odrazky) otočiť sa o nejaký dobre merateľný uhol

⁶http://sk.wikipedia.org/wiki/Smerodajn%C3%A1_odch%C3%BDlka

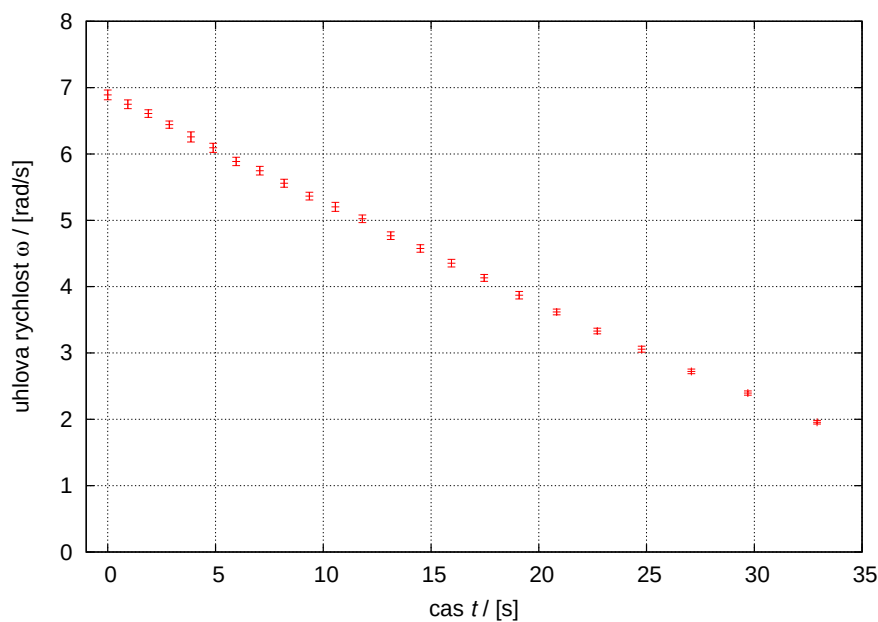
(napríklad $2\pi = 360^\circ$). Pre tento uhol stačí v programe Tracker počítať, koľko frameov n trvalo, kým sa koleso otočilo prvýkrát, druhýkrát a tak ďalej. Následne pomocou snímacej frekvencie $f = 240\text{ s}^{-1}$ určíme čas Δt , za ktorý koleso opíše uhol 2π :

$$\Delta t = \frac{n}{f}.$$

Vypočítať uhlovú rýchlosť je už hračka:

$$\omega = \frac{2\pi}{\Delta t} = \frac{2\pi f}{n}.$$

Z uhlových rýchlostí vypočítaných pre jednotlivé otáčky kolesa si môžeme zostrojiť graf znázorňujúci závislosť uhlovej rýchlosti od času, k čomu použijeme počítačový program Gnuplot. Do grafu vynášame priemerné hodnoty vypočítané z 10 meraní. Na výber máme dve možnosti: buď sa budeme riadiť zadáním a rýchlosti poposúvame tak, aby prvé meranie odpovedalo rovnakej hodnote ω , alebo si z každého natočeného videa vyberieme úsek približne rovnakých uhlových rýchlostí. Nakoniec nezabudneme vypočítať dôležitú smerodajnú odchýlku, ktorú vieme na grafe znázorniť pomocou chybových úsečiek alebo tzv. errorbarov, ktoré priamo znázorňujú, akou veľkou chybou sú jednotlivé merania zaťažené.

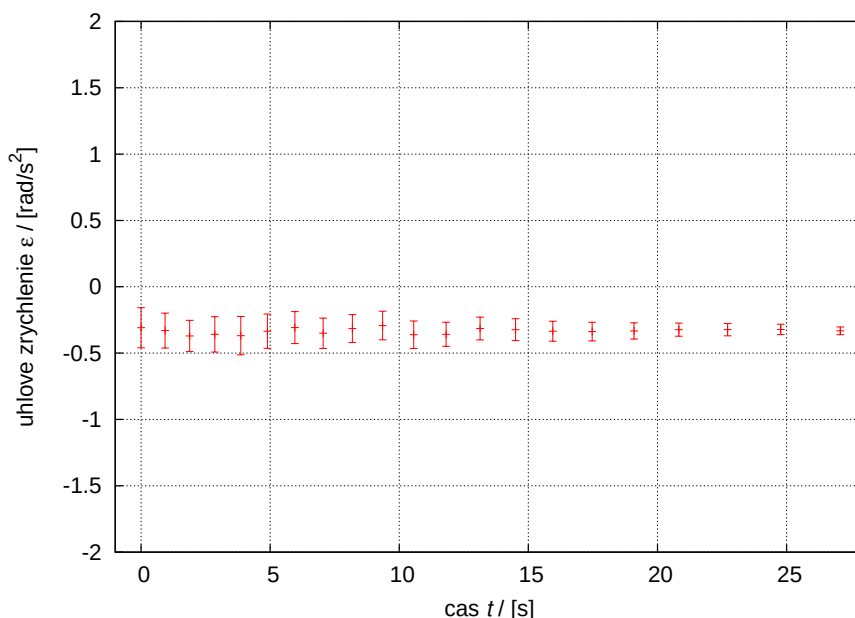


Obr. 9: Graf závislosti uhlovej rýchlosti na čase

Ďalej chceme zistiť uhlové zrýchlenie. To urobíme jednoduchou obmenou zadaného vzorca, kde vymeníme uhol za uhlovú rýchlosť – efektívne tak počítame pomer medzi zmenou uhlovej rýchlosti a odpovedajúcim časovým intervalom. Prepočet na uhlové zrýchlenia, aj spracovanie chýb sme urobili najrýchlejšou možnou cestou, pomocou Excelu. Opäť sme vypočítali priemerné hodnoty zrýchlenia a ich nepresnosti podľa vzorca pre tzv. prenesenú chybu:

$$\sigma_\epsilon = \frac{\sigma_{\omega_1} + \sigma_{\omega_2}}{\Delta t},$$

kde ω_1 a ω_2 sú „susediace“ uhlové rýchlosti. Vidíme, že jediný rozdiel oproti vzťahu pre uhlové zrýchlenie je v tom, že odchýlky neodčítame, ale sčítame. Je to kvôli tomu, že pokiaľ by prvá hodnota bola o nejakú odchýlku menšia a druhá o inú odchýlku väčšia, vo výsledku sa musia prejaviť obe chyby. Výslednú závislosť sme vyniesli do ďalšieho grafu.



Obr. 10: Graf závislosti uhlového zrýchlenia na čase

A čo nám grafy povedali? Začnime prvým: vidíme, že uhlová rýchlosť pekne lineárne klesala. Iba na konci nám tie hodnoty vychádzajú jemne odklonené od priamky. To je spôsobené tým, že počas jedného otočenia sa nám výrazne menila uhlová rýchlosť (napríklad pri poslednom otočení nám koleso zmenilo uhlovú rýchlosť až na nulu).

V druhom grafe si môžeme všimnúť, že pri vyšších uhlových rýchlostiach dostávame hodnoty uhlového zrýchlenia s dosť veľkým rozptylom. Ako je to možné? Tu už totižto vznikala chyba pri našom meraní pomocou kamery. I keď chyby merania sú pomerne malé, pri druhej numerickej derivácii (to je to, ako sme pomocou zadaného vzorca počítali uhlovú rýchlosť a neskôr aj uhlové zrýchlenie) sa nám aj malé chyby prejavujú vo väčšej miere. Takže z prižmúreným okom môžeme tvrdiť, že uhlové zrýchlenie je na základe grafu konštantné.

Na záver sa pozrime, kde sme sa dopustili najväčšej chyby. Dokumentovanie pohybu kolesa bolo naozaj presné (rádovo na stotiny sekundy). Naopak, meranie rozdielov časov je zaťažené väčšou chybou: pri spracovaní sme predpokladali, že koleso počas jednej otočky nespomaľuje, čo je pravdepodobne príliš silný predpoklad. Taktiež istá odchýlka v meraní vznikla pri spracovaní dát, pretože sme museli určiť, ktoré hodnoty uhlových rýchlostí k sebe „patria“.

Na záver môžeme prehlásiť, že na koleso pôsobia približne konštantné odporové sily, čo vyplýva z približne konštantného uhlového spomalenia.

2.5 B4/A2 – Dvojhlavý tank (opravoval Maťo B.)

Nevieme odkiaľ, no máme bombastický tank, ktorý má dve hlavne namierené opačným smerom – samozrejme tak, že nemieria proti sebe ;-). V tanku je $N = 42$ nábojov s hmotnosťou $m = 20$ kg. Tank s nábojmi váži dokopy $M = 43$ t.

Potom tank začne strieľať striedavo z hlavni náboje rýchlosťou $v = 1\,000$ m/s s frekvenciou strieľania $f = 0,2$ Hz. Keďže tank je nezabrzdený a dobre naolejovaný, začne sa pohybovať. Ako ďaleko od pôvodného miesta vystrelí posledný náboj? Akej veľkej chyby by sme sa dopustili, ak by sme zanedbali zmenu celkovej hmotnosti tanku počas strieľania?

Prvá vec, nad ktorou sa musíme zamyslieť je, prečo sa ten tank vlastne hýbe? Odpoveď je jasná ako facka, volá sa *zákon zachovania hybnosti*. Keďže výslednica všetkých síl pôsobiacich na tank je nulová,⁷ nutne sa musí zachovávať hybnosť sústavy. Do našej sústavy je ale nutné započítať aj náboje, ktoré sú pred vystrelením „skryté“ v tanku – ľahko by sme totiž mohli nadobudnúť pocit, že ich započítavať nemusíme.

Predtým, ako sa pustíme do riešenia, ešte pár formalít. Počiatok súradnicovej sústavy si pre jednoduchosť zvolíme tak, aby pozícia tanku (ozn. x) na začiatku bola rovná nule. Pre rýchlosti zvolíme tradičné znamienka, tj. rýchlosť je kladná, ak pozícia tanku v čase rastie. Index i pri rýchlosti V_i a pozícii x_i tanku bude označovať, že máme na mysli hodnoty týchto veličín *tesne po* výstrele i -teho náboja.

Je jasné, že v prípade, kde zanedbávame všetky odporové a trecie sily, sa rýchlosť tanku medzi dvomi výstrelmi nebude meniť, pretože na tank nepôsobí žiadna sila, ktorá by menila jeho pohybový stav. Preto je pohyb tanku medzi výstrelmi rovnomerný a priamočiary.⁸

Ďalej vieme, že $i + 1$. výstrel nastane o $V_i \cdot (1/f)$ ďalej, ako ten i -ty, pretože $1/f$ je perióda, s akou tank páli. Teda platí

$$x_{i+1} = x_i + V_i \frac{1}{f}.$$

Čo sa stane, ak tank vystrelí náboj rýchlosťou v ? Samozrejme, zmení sa rýchlosť a hmotnosť tanku. Hmotnosť poklesne o hmotnosť náboja m . Novú rýchlosť tanku V_{i+1} určíme na základe *zákona zachovania hybnosti*.⁹ Pred výstrelom mal tank hybnosť $M_i V_i$. Po vystrelení získala strela nejakú hybnosť. Zo zákona zachovania potom musel tank získať hybnosť rovnako veľkú, ale opačne orientovanú. Nebudeme dlho chodiť okolo horúcej kaše, pekne si to napíšeme, pričom nesmieme zabudnúť na to, že rýchlosť strely v máme vyjadrenú vzhľadom na hlaveň – teda tank. Preto skutočná rýchlosť strely v sústave spojenej so Zemou je $v + V_i$. Teda

$$\begin{aligned} M_i V_i &= (M_i - m) V_{i+1} + m(v + V_i), \\ V_{i+1} &= V_i - \frac{m}{M_i - m} v, \\ M_{i+1} &= M_i - m. \end{aligned}$$

⁷Stačí nám, že nulová je výslednica síl pôsobiaca v horizontálnom smere. Iné smery vlastne ani neuvažujeme – preto všetky veličiny popisujúce pohyb tanku budeme chápať ako ich horizontálne zložky.

⁸Zrýchlený pohyb tanku počas samotného procesu vystreľovania náboja zanedbáme, keďže nemáme žiadnu informáciu o tom, ako prebieha. Naopak, budeme predpokladať, že výstrelom sa zmení jeho rýchlosť skokovo.

⁹Skrýva sa v ňom neskutočná sila, pretože nám dovoľuje ignorovať priebeh výstrelu a všimnúť si len dva dobre popísateľné stavy.

Posledná kľúčová vec, ktorú si musíme uvedomiť je, že tank má dve hlavne, z ktorých strieľa striedavo. Tento fakt vieme šikovne započítať do nášho riešenia, a to tak, že po každom výstrele zmeníme znamienko rýchlosti strely v na $-v$.

Na úplný popis toho, čo sa s tankom deje, nám vystačia štyri nami objavené pravidlá a informácia o počiatočnej polohe $x_0 = 0$ m, rýchlosti $V_0 = 0$ m/s a hmotnosti tanku $M_0 = 43 \cdot 10^3$ kg:

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= x_i + V_i \frac{1}{f}, \\V_{i+1} &= V_i - \frac{m}{M_i - m} v, \\M_{i+1} &= M_i - m, \\v &= -v.\end{aligned}$$

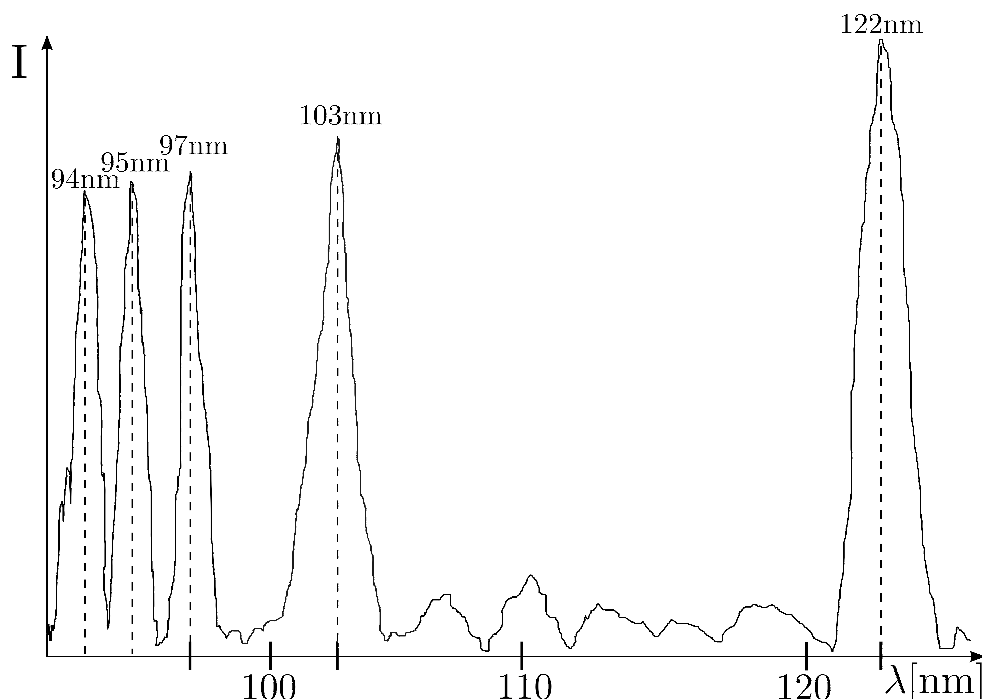
Tí z vás, ktorí sú programátorsky zdatnejší, si naprogramovali jednoduchý for-cyklus obsahujúce predošlé rovnice a dopracovali sa k výsledku. No k riešeniu sa vieme dostať aj inak: výsledok môžeme dopočítať ručne, resp. s pomocou kalkulačky, alebo si otvoríme tabuľkový procesor a úlohu vyriešime v ňom. My sa prikláňame, ako iste tušíte, k poslednej možnosti. Príslušné hodnoty x_i , V_i , M_i a aktuálne v si budeme ukladať do štyroch stĺpcov. Ak si s tým neviete rady, pozrite si ukážkovú tabuľku.¹⁰

Postupným iterovaním sa dopracujeme k vzdialenosti 48,9 m tesne po 42. výstrele. Ak by sme zanedbali zmenu hmotnosti tanku, tak nestačí len zmeniť pravidlo $M_{i+1} = M_i - m$ na $M_{i+1} = M_i$. Ak si to napíšeme ešte raz, tak rovnica $M_i V_i = (M_i - m) V_{i+1} + m(v + V_i)$, prejde na rovnicu $M_i V_i = (M_i) V_{i+1} + m(v + V_i)$, odkiaľ si už ľahko vyjadríte upravené pravidlo. Tým dospejeme k hodnote 48,4 m. Rozdiel medzi výsledkami je menší ako 1,1 %, čo je naozaj zanedbateľné. Dôvod, prečo sa výsledok prakticky nezmenil je, že strela váži o tri rády menej ako samotný tank.

2.6 A3 – Žiarivý vodík (opravoval Kubo)

Kubo ožaroval atómy vodíka svetlom s rôznymi vlnovými dĺžkami, pričom druhá časť jeho aparatury merala vyžarované spektrum vodíka. Po chvíli ho to však prestalo baviť a išiel si dať kávu. Zrazu však na vlastné oči videl, že jeho atómy zažiarili. Bohužiaľ, túto informáciu jeho high-tech aparatura nestihla zachytiť. Akú rôznu farbu mohlo mať svetlo, ktoré atómy vyžiarili? Využite pri tom grafickú informáciu o tom, aké svetlo atómy pohltili a aké nie.

¹⁰<http://fks.sk/~matob/vzoraky/tabulka>



Obr. 11: Obrázok emisného spektra vodíku. Na zvislej osi je intenzita žiarenia (v relatívnych jednotkách), ktorú zachytila Kubova aparátúra v závislosti od rôznej vlnovej dĺžky.

Z kvantovej teórie dobre vieme, že energia základného stavu atómu vodíka¹¹ je

$$E_1 = -13,6 \text{ eV},$$

pričom $[1 \text{ eV}] = e[1 \text{ J}]$ (e je náboj elektrónu). Záporná energia E_1 znamená, že elektrónu potrebujeme dodať energiu $13,6 \text{ eV}$, aby sa vytrhol zo silového pôsobenia jadra (tzn. aby sa atóm *ionizoval*).

Ak atóm ožiarime elektromagnetickou vlnou (svetlom) s vhodnou vlnovou dĺžkou λ , vieme ho dostať do vyšších energetických stavov. Takéto stavy sa v odbornej literatúre nazývajú excitované a nadobúdajú hodnoty

$$E_n = \frac{E_1}{n^2}, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Stavy navyše označujeme práve pomocou čísla n .

Rozdiel energií pri preskoku medzi dvomi stavmi je možný, iba ak rozdiel energií hladín $\Delta E = E_n - E_m$ je rovný diskretnému násobku¹² frekvencie pohlteneho svetla:

$$\Delta E = hf.$$

¹¹... alebo lepšie povedané, základný stav *elektrónu* v atóme vodíka.

¹²Tento diskretný násobok sa nazýva *Planckova konštanta*. Jej hodnota je $h = 6,26 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$.

Proces s atómom a svetlom však funguje aj opačne. Ak sa atóm nachádza napríklad v stave $m > 1$ s energiou E_m , existuje nenulová pravdepodobnosť, že sa v určitom čase rozhodne¹³ skočiť do nižšieho stavu n s energiou E_n . Vtedy atóm emituje svetlo s presne určenou vlnovou dĺžkou λ_{mn} :

$$E_m - E_n = hf_{mn} = \frac{hc}{\lambda_{mn}} \quad \longrightarrow \quad \lambda_{mn} = \frac{hc}{E_m - E_n} = \frac{hc}{E_1 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right)}. \quad (1)$$

Ak Kubo vedel voľným okom spozorovať svetlo emitované atómom vodíka (zrejme pri prechode z nejakého vyššieho stavu do nižšieho), musela sa jeho vlnová dĺžka nachádzať v intervale (380 – 750) nm. Poďme teraz skúmať, ktoré vodíkové prechody sú schopné emitovať viditeľné svetlo. Začnime so všetkými prechodmi z ľubovoľného stavu $m > 1$ do základného stavu $n = 1$. Zo vzťahu (1) nie je ťažké vypočítať hľadané vlnové dĺžky:

$m \rightarrow (n = 1)$	$E_2 \rightarrow E_1$	$E_3 \rightarrow E_1$	$E_4 \rightarrow E_1$	$E_5 \rightarrow E_1$	$E_6 \rightarrow E_1$	$\dots$	$E_\infty \rightarrow E_1$
$\lambda[\text{nm}]$	121,6	102,6	97,25	94,97	93,78	$\dots$	91,18

Tab. 1: Lymanova séria

Táto séria vlnových dĺžok bola pozorovaná aj experimentálne, a to americkým fyzikom Theodorom Lymanom, po ktorom je aj pomenovaná. Vidíme však, že ani jedna dĺžka nespadá do spektra pozorovateľného ľudským okom, preto sa vrhnime na prípady, kedy atóm vodíka skočil z ľubovoľného excitovaného stavu $m > 2$ do stavu $n = 2$:

$m \rightarrow (n = 2)$	$E_3 \rightarrow E_2$	$E_4 \rightarrow E_2$	$E_5 \rightarrow E_2$	$E_6 \rightarrow E_2$	$E_7 \rightarrow E_2$	$\dots$	$E_\infty \rightarrow E_2$
$\lambda[\text{nm}]$	656,3	486,1	434,0	410,2	397,0	$\dots$	364,6

Tab. 2: Balmerova séria

V tomto prípade sme počítali tzv. *Balmerovu sériu*. A vidíme, že všetky nájdené vlnové dĺžky sú pozorovateľné voľným okom!

Poďme sa ale pre istotu pozrieť ešte na prechody $m \rightarrow (n = 3)$, či náhodou aj tam nezbadáme vyhovujúce λ -y. Takáto séria sa nazýva *Paschenova*:

$m \rightarrow (n = 3)$	$E_4 \rightarrow E_3$	$E_5 \rightarrow E_3$	$E_6 \rightarrow E_3$	$E_7 \rightarrow E_3$	$E_8 \rightarrow E_3$	$\dots$	$E_\infty \rightarrow E_3$
$\lambda[\text{nm}]$	1 875	1 282	1 094	1 005	954,6	$\dots$	820,4

Tab. 3: Paschenova séria

Nuž, nezbadali sme. A v ďalších sériách $m \rightarrow n > 3$ nezbadáme tiež, pretože všetky vlnové dĺžky budú určite väčšie než 820,4 nm, čo už je infračervená oblasť. Keby niekoho zaujímalo, na internete sa dá nájsť veľa pekných obrázkov zobrazujúcich vodíkové prechody.¹⁴

¹³Toto „rozhodovanie“ bližšie popisuje až kvantová mechanika.

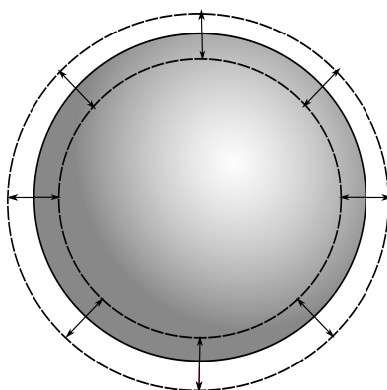
¹⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Hydrogen_spectral_series

Kubo teda mohol pozorovať akýkoľvek prechod Balmerovej série, tzn. farby **červenú**, **azúrovú**, **modrú** a **fialovú**.

2.7 A4 – Bublínková infekcia (opravoval Maťo B.)

Jedného dňa si mikróby typu μ povedali, že chcú expandovať do iných svetov. A že nemali po ruke nič vzletnejšie, nechali sa z planéty vyfúknuť v poriadnej mydlovej bubline. Keď preplávali aj poslednými zvyškami atmosféry, mikrób Mišo sa zahľadel do číreho Slnka. Z ostrého svetla ho zaštekli brvy a kýchol. Bublina začala kmitať v radiálnom smere, tj. stále bola guľatá, no jej polomer sa periodicky zväčšoval a zmenšoval. Aká je frekvencia takýchto kmitov? Skúste sa pozrieť na to, ako sa mení sila na malý kúsok bubliny s meniacim sa polomerom.

Bublina mala vo vákuu polomer R a mydlovodová vrstva hrúbku h , hustotu ρ a povrchové napätie σ .



Obr. 12: Znázornenie kmitajúcej bubliny.

V zadaní sme vám napovedali, že máte zvoliť silový prístup. Hneď si objasníme prečo. Vo všeobecnosti, ak sa chceme dopracovať k (diferenciálnej) rovnici, ktorej riešením sú harmonické oscilácie, čiže rovnici pre zrýchlenie typu

$$a(t) = -Cx(t),$$

tak máme dve možnosti. Môžeme sa pozerieť na sily, v ktorých nám, po použití príslušných aproximácií pre malé výchylky, zostanú len členy lineárne závislé na výchylke x . Ak je výsledná sila taká, že po vychýlení vracia systém do rovnovážnej polohy (je úmerná $-x$), máme vyhraté, pretože dostaneme pohybovú rovnicu vedúcu na harmonické kmity.

$$ma(t) = -Cx(t) \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C}{m}}.$$

Druhou možnosťou, ako sa dopracovať k harmonickým kmitom, je pozrieť sa na to, ako závisí mechanická energia systému na výchylke a rýchlosti. Ak zistíme, že mechanická energia sa dá napísať ako súčet dvoch členov závislých na x^2 a v^2 , z analógie s kinetickou energiou závažia a elastickej energie pružinky vieme určiť frekvenciu kmitov:

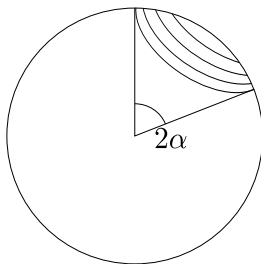
$$E = \frac{1}{2}m^*v^2 + \frac{1}{2}k^*x^2 = \text{konšt.} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k^*}{m^*}}.$$

Nevýhoda tohto postupu je, že musíme používať aproximácie, ktoré nezanedbávajú kvadratické členy (komplikované) a lineárne členy nám musia vypadnúť (najčastejšie pomocou triku s energiou systému v rovnovážnej polohe). Navyše, keďže v tomto prípade sa jedná o termodynamický systém, vyjadrovať energiu vyžaduje nemalú zručnosť pri počítaní s malými príspevkami (diferenciálmi). Avšak tí, ktorí vedú derivovať, si môžu overiť, že ak sa mechanická energia naozaj zachováva, tak posledná rovnica po zderivovaní podľa času dá vyššie uvedenú pohybovú rovnicu harmonických kmitov.

Predtým, ako sa pustíme do riešenia, si ujasníme, ako prebiehajú popísané kmity. Dôležité je to preto, aby sme vedeli s istotou určiť, ako hmotný objekt vlastne kmitá. Striktne vzaté, okrem blany sa pohybuje aj vzduch vo vnútri bubliny (okolo bublinky je vákuum). Sami si však skúste overiť, že pre typické hodnoty R , h , ρ a σ je tlak vzduchu v bubline taký malý, že hmotnosť samotného plynu vnútri bublinky je zanedbateľná oproti hmotnosti membrány – stačí teda uvažovať len hmotnosť samotnej membrány.

Podobne môžeme zistiť, že tepelná kapacita mydlovej blany je o niekoľko rádov vyššia ako tepelná kapacita plynu v bubline. Celý proces je preto s dobrou presnosťou izotermický,¹⁵ pretože mydlová blana bude fungovať ako tepelný rezervoár. Vyzbrojení teoretickým úvodom sa môžeme konečne pustiť do riešenia.

Pozrime sa, čo sa bude diať s bublinkou, ak jej polomer zväčšíme o malé x . Na to, aby sme vedeli rozumne popísať sily pôsobiace na bublinku, pozrime sa na malý kúsok na povrchu blany vyfatý malým uhlom 2α .



Obr. 13: Malý uhol 2α na bubline

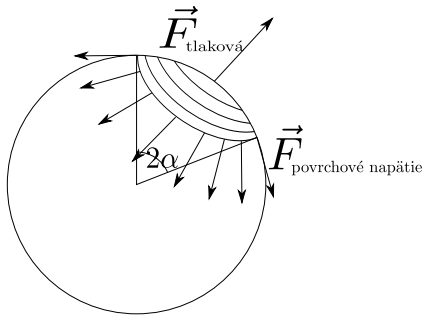
Vďaka pomerne jednoduchšej trigonometrii vieme vypočítať plochu a hmotnosť tejto malej plôšky. Okrem toho využijeme, že pre malé uhly α (v radiánoch) platí $\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$:

$$S = \pi(\tan \alpha R)^2 \approx \pi(\alpha R)^2,$$

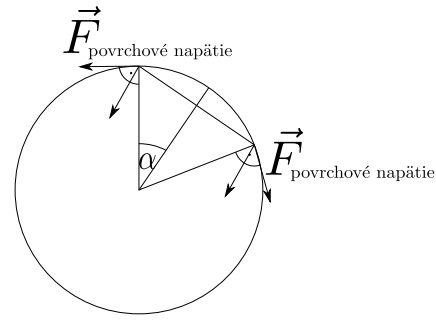
$$m = \rho S h.$$

Na túto plôšku pôsobí tlaková sila F_t , ktorá sa snaží plôšku zväčšiť, a sily povrchového napätia, ktoré sa snažia plôšku zmenšiť. Sily povrchového napätia sú rovnobežné s povrchom a smerujú symetricky od stredu plôšky smerom k jej okrajom. Ich výslednicu si označíme F_p .

¹⁵Ak ste ale uvažovali adiabatické kmity, body sme vám nestrhli. Kvalitatívne sa to vo výsledku prejaví iba nejakou κ navyše.



Obr. 14: Sily pôsobiace na kúsok bublinky



Obr. 15: Priemety pôsobiacich síl

Silu F_p určíme jednoducho, stačí ak si uvedomíme, že výslednica síl povrchového napätia má zo symetrie radiálny smer (smeruje do stredu bubliny), pričom k nej prispieva priemet každej „malej“ sily povrchového napätia určený $\sin \alpha$:

$$F_p(x) = 2 \cdot 2\pi \tan \alpha (R + x) \sigma \sin \alpha \approx 4\pi \alpha^2 \sigma (R + x).$$

Tlakovú silu F_t určíme jednoducho ako pS . Nesmieme ale zabudnúť na to, že tlak v bublinke sa mení v závislosti na jej aktuálnom objeme. Pri počítaní nového objemu a plochy si pomôžeme tým, že povrch bublinky sa naťahuje rovnomerne, tj. veľkosť uhlu α , pod ktorým vidíme našu plôšku sa prakticky nezmení, ak sa bublinka zväčší. Preto môžeme písať

$$\begin{aligned} \frac{S}{4\pi R^2} &= \frac{S(x)}{4\pi (R+x)^2} & \Rightarrow & S(x) = S \left(1 + \frac{x}{R}\right)^2 \approx S \left(1 + 2\frac{x}{R}\right), \\ \frac{V}{4/3\pi R^3} &= \frac{V(x)}{4/3\pi (R+x)^3} & \Rightarrow & V(x) = V \left(1 + \frac{x}{R}\right)^3 \approx V \left(1 + 3\frac{x}{R}\right). \end{aligned}$$

Vo všetkých pomeroch sme využili, že pre $x \ll 1$ možno použiť aproximáciu $(1+x)^a \approx 1+ax$.

Pri určení zmeny tlaku v bublinke si zasa pomôžeme diskutovanou izotermickosťou kmitov ($pV = \text{konšt.}$):

$$\begin{aligned} pV &= p(x)V(x) & \Rightarrow & p(x) = p \frac{V}{V(x)} \approx p \left(1 + 3\frac{x}{R}\right)^{-1} \approx p \left(1 - 3\frac{x}{R}\right), \\ F_t(x) &= p(x)S(x) \approx pS \left(1 - 3\frac{x}{R}\right) \left(1 + 2\frac{x}{R}\right) \approx pS \left(1 - \frac{x}{R}\right). \end{aligned}$$

Pri poslednej úprave sme zanedbali člen úmerný x^2 . Teraz si už smelo môžeme napísať pohybovú rovnicu

$$ma(t) = \rho Sh \cdot a(t) = F_t(x) - F_p(x) = pS \left(1 - \frac{x}{R}\right) - 4\pi \alpha^2 \sigma (R + x).$$

Ak si spomenieme, že veľkosť našej plôšky S je práve $\pi(\alpha R)^2$ a tlak v bublinke je rovný $4\sigma/R$,¹⁶ tak môžeme písať pohybovú rovnicu¹⁷

$$\rho \pi (\alpha R)^2 h a(t) = \frac{4\sigma}{R} \pi (\alpha R)^2 \left(1 - \frac{x(t)}{R}\right) - 4\pi \alpha^2 \sigma (R + x(t)),$$

¹⁶Pripomínáme, že guľový zakrivený povrch vytvára tlak $2\sigma/R$. Bublinka má povrchy dva, preto je vo vzorci 4.

¹⁷V nej sa konštantné členy vyrušia a členy s x sčítajú.

alebo po úprave do základného tvaru

$$a(t) = -\frac{8\sigma}{\rho h R^2} x(t).$$

Odtiaľ už ľahko vidíme, že frekvencia kmitov je

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{8\sigma}{\rho h R^2}}.$$

Ak ste predpokladali adiabatickosť kmitov, namiesto osmičky by vám vo výslednom vzorci malo svietiť $4(3\kappa - 1)$, kde κ je Poissonova konštanta plynu v bublinke. Pre vzduch je $\kappa \approx 1,4$, teda $4(3\kappa - 1) \approx 12,8$.