Fyzikálny korešpondenčný seminár
30. ročník, 2014/2015
FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava
e-mail: otazky@fks.sk web: http://fks.sk

Vzorové riešenia 3. kola letnej časti 2014/2015

Na to, aby boli naše vzoráky a príklady lepšie, rozhodne potrebujeme feedback. Kľúčový je aj ten tvoj, preto ťa prosíme o vyplnenie ankety na **fks.sk/anketa/seria**.

3.1 B0 – Lenivé rána (opravoval Vladko)

Kaja je lenivá si každé ráno robiť raňajky. Preto má vždy na polici v dóze zásobu zapekaného müsli. Z dlhoročných skúseností vie, že keď ho do dózy nasype a potom ňou zatrasie, trocha miesta sa uvoľní a môže dosypať zvyšok sáčku. Viete to vysvetliť?

Ďalej vie, že keď to s tým trasením preženie, najväčšie hrudy sa usadia na vrchu a najmenšie naspodku. Prečo sa to deje? Nemali by najväčšie, a teda najťažšie hrudy klesať nadol?

Predstavme si proces sypania müsli do dózy. Keďže obsahuje aj väčšie kúsky, tak tie pri nasypaní zaujmú pevnú pozíciu. Kúsky do seba nezapadajú dokonale, teda sú medzi nimi malé medzery, cez ktoré vedia prepadnúť menšie kúsky. Inak povedané, ak je kúsok müsli dostatočne malý, tak dokáže prekĺznuť nižšie než tie, čo sa dostali do nádoby pred nimi. Lenže jednotlivé úlomky nemajú dokonale hladký tvar, teda menšie sa poľahky zachytia niekde na výčnelku väčších alebo sa niekoľko menších navzájom vzprieči v medzere, ktorou by sa inak dokázali postupne prepchať.

Fyzikálne vzaté, niektoré malé kúsky sa nachádzajú v potenciálovej jame, teda po ústálení pohybu majú aktuálne najnižšiu dosiahnuteľnú potenciálnu energiu, ale pri vonkajšom impulze sa vedia dostať z tejto polohy a prepadnúť medzerami do nižšej polohy. Zatrasenie je takýmto impulzom, ktorý pomôže zapriečeným kúskom prepadnúť nadol. Naskytuje sa nám otázka, či sa nemôže stať, že sa nejaké kúsky vychýlia a dostanú sa do vyššej potenciálovej jamy, teda sa zaseknú niekde vyššie. Niečo takéto by malo za následok, že müsli, ktoré naplnilo nádobu by sa po zatrasení do nádoby nezmestilo. Príčina prečo sa to nedeje je tá, že gravitačná sila ťahá kúsky nadol. Preto pravdepodobnosť, že gravitácia vychýlený kúsok „spláchne po prúde“, je oveľa väčšia než pravdepodobnosť, že kúsok sa usadí vyššie. Pravdaže, to nevylučuje možnosť, že by sa tak nemohlo stať, ale počet takýchto kúskov bude značne minoritný.

Teraz sa zamyslime nad druhou otázkou. Už intuitívne nám napadne, že väčšiu rolu ako hmotnosť by mala zohrávať hustota, no tá je pre veľké a malé kúsky rovnaká. Pri trasení sa

Generálny partner
Partneri
Mediálny partner

kúsky mierne nadvihnú a ako bolo už vyššie spomenuté, tak z vrchu smerom nadol prepadávajú ďalšie, čo spôsobuje že na dne začnú tvoriť akúsi spojitú vrstvu a na vrchu zostanú len veľké kúsky, ktoré nedokážu prepadnúť dole. Pri nadvihnutí kúskov sa menšie ľahšie dostanú pod väčšie, dalo by sa povedať, že vrstva malých kúskov sa pri trasení správa ako kvapalina. V pokoji je však vrstva pevná, teda veľký kúsok cez ňu nedokáže prepadnúť. To má za následok, že po vytrvalom trasení všetky drobné kúsky na dne dózy vytvoria hladinu, ktorá bude pre väčšie kúsky nepreniknuteľná.

3.2 B1 – Kazisvet (opravoval Jimi)

V Číne v provincii Fei Kai Sen sa počas dynastie A Du Schik mladý úderník Du Schan jedného dňa rozhodol, že sa vydá na pravidelný večerný trh. Do oka mu padol tzv. „Čínsky kompas“[1]. Ten funguje nasledovne. Ide o dvojkolesový vozík, ktorý človek môže ťahať, prípadne tlačiť. Na vrchu vozíka sa nachádza socha čínskeho mysliteľa Ju La, ktorá udáva smer na juh.

Obr. 1: Ju Lo - vždy ukazujúci na juh.

Kolesá vozíka sú spojené komplikovaným systémom prevodov[2], ktoré zabezpečujú, že Ju Lo vždy ukazuje na juh. Du Schan celý natešený, že práve tento vynález mu zmení život, sa rozhodol u obchodníka Lu Kafa tento vozík kúpiť. O niekoľko mesiacov neskôr ho však prišiel reklamovať, pretože Ju Lo už neukazoval na juh. Akými spôsobmi mohol mladý úderník Du Schan pokaziť vozík obchodníka Lu Kafa tak, aby už neukazoval na juh? Vymyslite aspoň tri rôzne spôsoby.

Du Shanovi sa mohlo stať veľa rôznych náhod, ktoré by pokazili vozík.

Asi najnešťastnejšia, ktorá by dokonca nebola závadou vozíka, by bola nočná návšteva figliara, ktorý by otočil sošku (alebo celý vozík) iným smerom. Wikipédia [3] totiž po dôkladnom prečítaní prezradí, že soška ukazovala nie na juh, ale smerom, ktorým bola nastavená. Preto, ak by niekto náhodou otočil sošku inam ako na juh, by soška ukazovala týmto smerom. Tento problém by nastal aj ak by sa vozík nedajbože prevrátil a Du Shan by ho nevedel postaviť presne naspäť.

Ďalšia možnosť by bola nepresná konštrukcia vozíka. Je možné, že Lu Kaf je naozaj frajer a kolesá vozíka vybrúsi tak, aby sa ich polomery nelíšili ani o 1/1000 m, ale ani táto presnosť

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/South-pointing_chariot
[2] http://goo.gl/eKo64s
[3] http://en.wikipedia.org/wiki/South-pointing_chariot

nebude stačiť a už pri ceste dĺžky 1 kilometer bude soška (podľa wikipédie) ukazovať o 20° mimo. Je možné aj to, že Du Shan nevediac prešiel jedným kolesom po tráve a druhým po štrku a teda by sa jedno koleso opotrebovalo o trochu viac.

Tento vozík však bol konštruovaný na konkrétnu zemepisnú šírku, teda ak by sa rozhodol s ním jazdiť po Austrálii, tak by sa soška rýchlo vychýlila. Aby ste si tento prípad vedeli lepšie predstaviť, predstavte si ako ide vozík po rovnej čiare veľmi blízko južného pólu. Soška by ukazovala tým istým smerom, zatiaľ čo južný pól by sa vedľa nej pohyboval rapídnou rýchlosťou.

Ešte jedna mrzutosť, čo sa mohla Du Shanovi stať, by bola na ceste popri zamrznutom jazere alebo namydlenej dlážke. Ak by jedno koleso bolo na šmykľavom povrchu a druhé na pevnom, diferenciál vo vozíku by sa otáčal, ako keby koleso na šmykľavej podložke stálo. Toto je konštrukčná chyba diferenciálu, ktorý vie zaznamenať len otáčanie a nie posúvanie kolies. Preto by sa soška zbytočne otáčala aj pri drobnom prešmyknutí. Tento problém nastane vždy, keď jedno koleso prejde o trochu väčšiu vzdialenosť ako druhé, teda keď prejde jedným kolesom po kamienku alebo mierne zakrivenom povrchu, soška už nebude ukazovať presne na juh.

Posledný dôvod nefunkčnosti vozíka je geometrický. Aj keby vozík fungoval perfektne na rovine, na guli už fungovať nebude. Stačí, ak sa budeme s vozíkom pohybovať po dráhe, ktorá nie je kružnicou s rovnakým obvodom ako má rovník. Dôvod je ale rovnaký ako naposledy. Jedno koleso by prešlo menšiu dráhu ako to druhé, čiže by urobilo aj menej otočení, čo by znamenalo „pokazenie“ diferenciálu. Dôvodom je fakt, že geometria na povchu gule nie je totožná s geometriou „plochej“ roviny, o čom sa možno dozviete niečo viac, keď z vás budú veľkí fyzici a fyzičky :).

3.3 B2 – Zakúrme si (opravoval Maťo B)

Čajka s Dušanom si na zimnej lyžovačke chcú zakúriť v horskej chate. Dušan však začal tvrdiť, že by nemali kúriť a míňať tak zbytočne drevo. Odôvodňoval to tak, že vnútorná energia plynu v chate sa aj tak zmeniť nemôže. (Vnútorná energia plynu závisí od teploty a počtu častíc ako $U = \frac{3}{2}NkT$.) Čajka naňho začala namrzene kričať, že ona zmrznúť nechce. Odvolávala sa na zdravý rozum. Veď kúriť sa určite oplatí, lebo tým zvýšime teplotu v miestnosti. Prečo inak by sme to robili?

Rozhodnite, kto a prečo má pravdu, resp. vysvetlite v čom je situácia paradoxná. Môžete predpokladať, že pre vzduch platí stavová rovnica $pV = NkT$, kde p je tlak vzduchu v miestnosti, V je objem miestnosti, N je počet častíc plynu, T je teplota a k je tzv. Boltzmanova konštanta. Nebojte sa rozmýšľať nad príkladom skôr ako v deň série. Potom ho zvládnete vyriešiť, aj keď ste sa s termodynamikou v škole ešte nestretli :).

Na prvý pohľad vyzerá tento príklad ťažko a na druhý tiež :). Ak si však uvedomíme dve kľúčové veci, tak to až také ťažké nebude. Poďme na to, ale pekne poporiadku.

Dušan tvrdí, že **vnútorná energia plynu sa v chate zmeniť nemôže**, nech by kúrili akokoľvek. Na prvý pohľad sa to môže zdať ako totálna blbosť. Očakávali by sme, že pri spaľovaní dreva sa uvoľňuje teplo, to ohreje miestnosť, čiže zvýši teplotu, a tým pádom narastie aj vnútorná energia plynu[4]. My tvrdíme, že Dušan má naozaj pravdu, aj keď to na prvý pohľad môže pre nezasvätených vyzerať ako blbosť.

[4]Vnútorná energia plynu je súčet kinetickej a potenciálnej energie molekúl. V prípade ideálneho plynu, kedy predpokladáme, že molekuly na seba silovo nepôsobia, až na pružné zrážky, pochádza prakticky celá vnútorná energia plynu z kinetickej energie mikroskopického pohybu molekúl.

Pozrime sa, od čoho závisí vnútorná energia plynu.[5] Vieme, že platí

$$U = \frac{5}{2}NkT\,.$$

Vidíme, že ak rastie teplota ideálneho plynu, tak bude rásť aj jeho vnútorná energia. Vyskytuje sa tu však aj počet častíc, ktorý sa meniť môže, no ešte nevieme ako. Pozrime sa, kde sa ešte vyskytuje kombinácia NkT. Rovnaká kombinácia sa vyskytuje aj v stavovej rovnici ideálneho plynu

$$pV = NkT\,.$$

Odtiaľ vidíme, že $U \sim pV$. A čo vieme povedať o výraze pV? No, ten je predsa konštantný! Nie preto, lebo sme sa to tak učili, ale preto, lebo V, objem vzduchu v miestnosti, teda objem samotnej miestnosti, zostáva konštantný a rovnako je konštatný aj tlak vzduchu v miestnosti. To preto, lebo tlak vzduchu v chate je vždy rovnaký ako atmosférický tlak. Chata totiž nie je nepriepustná. Ak by bol v chate iný tlak ako vonku, potom by začal prúdiť vzduch práve tak, aby vyrovnal tento rozdiel tlakov. Ak predpokladáme, že mimo chaty sa tlak ani teplota vzduchu nemení, tak sa tieto veličiny nebudú meniť ani vnútri miestnosti, pretože nastane taký stav, kedy do miestnosti bude za jednotku času prichádzať rovnako veľa rovnako rýchlych molekúl ako z nej odchádzať. Ak sa teda nezmení tlak vzduchu vonku, tak sa nezmení ani súčin pV, a teda ani vnútorná energia plynu v chate. **Toto je to kľúčové pozorovanie!** Dušan mal teda, ako inak, pravdu. Všimnime si ešte, že na to, aby pV bolo konštatné pri zvyšujúcej sa teplote, musí počet častíc nutne klesať, a teda pomalé častice „musia“ opustiť miestnosť.

Prečo teda kúrime, aj keď nevieme zmeniť vnútornú energiu plynu v chate? Pointa je v tom, že nám je v skutočnosti úplne jedno, aká je vnútorná energia plynu. Nás totiž zaujíma iba to, akú teplotu má vzduch v miestnosti, čo je z definície priemerná vnútorná energia na počet častíc. Vnútorná energia sa síce zmeniť nemôže, no ak počet častíc klesne, tak sa zvýši teplota vzduchu v miestnosti. Pravdu, mala teda aj Čajka. V skutočnosti totiž pálime drevo, či uhlie v krbe práve na to, aby sme dostali pomalé molekuly vzduchu von z miestnosti :).

Teda pravdivé sú obe tvrdenia a navzájom si neodporujú.

3.4 B3/A1 – Dokonalé osvetlenie (opravoval Maťo B, vzorák JAno a Maťo B)

Zuzka si nedávno vymenila na intráku starú žiarovku za nový, ekologickejší, zdroj osvetlenia. Akosi sa jej však nepozdávala „farba“ osvetlenia, a preto poprosila vás, aby ste jej pomohli určiť, ako vyzerá spektrum rôznych zdrojov svetla. Áno, toto je experimentálka! Na tejto adrese [6] nájdete návod, ako si doma postaviť spektrometer. Následne sa pokúste odfotiť spektrum čo najväčšieho množstva rôznych druhov zdrojov osvetlenia (klasická žiarovka, žiarivka, LED lampa, atď.)[7]. Spolu s odfotenými spektrami nám pošlite aj základné informácie o zdrojoch osvetlenia, ktoré ste skúmali. Pozor, to nie je všetko! Na tejto adrese[8] si môžete vami získané spektrá nechať zanalyzovať. Ako kalibráciu môžete použiť napríklad sodíkovú výbojku, ktorá má presne určenú typickú spektrálnu čiaru. Na tejto stránke si vytvorte z vami odfotených spektier

[5] Na číselnom koeficiente, toto číslo závisí od *počtu stupňov voľnosti*, tentoraz záležať nebude. Pre jednoatómové molekuly bude koeficient rovný 3, pre dvojatómové 5. Vzduch je z prevažnej miery zložený práve z dvojatómových molekúl.

[6] `http://publiclab.org/sites/default/files/8.5x11mini-spec3.8.pdf`

[7] Pozor, nepozerajte sa spektroskopom priamo do Slnka!

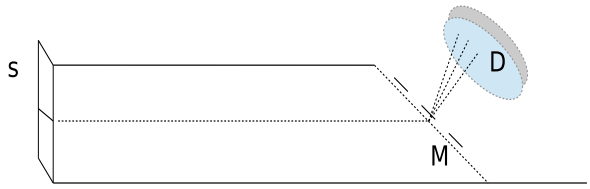
[8] `http://spectralworkbench.org/`

závislosť relatívnej intenzity svetla od vlnovej dĺžky. Pokúste sa odhadnúť aj chyby merania. Najkrajšie spektrá budú odmenené špeciálnou cenou!

Podľa návodu si najskôr zostrojíme papierový spektrometer. Ak sa nám to podarilo, malo by to vyzerať nejako takto:

Obr. 2: Spektrometer (za túto úžasnú fotografiu vďačíme Martinovi Marekovi)

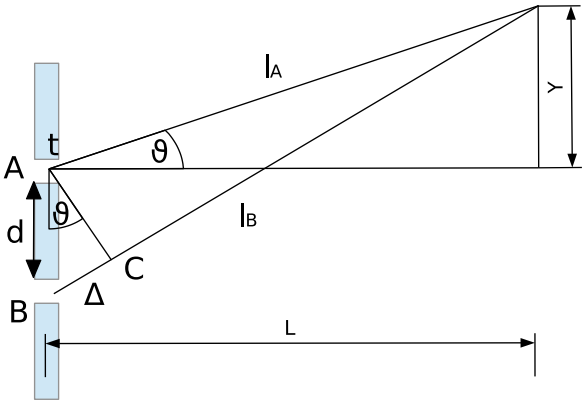
Spektrometer, znázornený na schéme



Obr. 3: Schéma spektrometra

funguje tak, že prichádzajúce svetlo zo zdroja (zľava) najprv prejde úzkou štrbinou S, ktorá pustí ďalej len úzky, z pohľadu aparatúry rovnobežný zväzok lúčov. Následne svetlo prejde optickou mriežkou M. Tú sme získali z DVDčka a efektívne sa správa ako mriežka s vrypmi, ktoré sú podľa výrobcu vzdialené 740 nm. To je vzdialenosť porovnateľná s vlnovou dĺžkou svetla, takže na rozloženie svetla na spektrum nám určite dobre poslúži.

Pre jednoduchosť si rozoberme najprv usporiadanie na schéme,



Obr. 4: Difrakcia na mriežke

kde svetlo dopadá kolmo na mriežku. Pri prechode svetla otvormi, ktorých rozmery sú porovnateľné s jeho vlnovou dĺžkou sa uplatňuje takzvaný Huygensov princíp. Ten hovorí, že svetlo sa po prechode správa rovnako, ako keby každá štrbina slúžila ako nový zdroj svetla, z ktorého sa vlnenie šíri do všetkých smerov rovnomerne a fázovo synchronizované na guľových vlnoplochách. Tieto vlnenia však spolu interferujú, tzn. amplitúdy dvoch alebo viacerých vĺn sa spolu skladajú a my ich následne meriame.

Pozorovaný obrazec musel nutne vzniknúť konštruktívnou interferenciou, teda takou, kde sa vlnenia skladajú vo fáze a intenzita zloženej vlny je maximálna. Ak sa pozrieme na dve vlnenia prichádzajúce zo susedných štrbín A a B vzdialených d, ktoré dopadajú na rovinu detektora vzdialenú L od mriežky pod uhlom θ, tak aby dorazili do bodu D v rovnakej fáze a teda konštruktívne zinterferovali, musí platiť, že dráhový rozdiel vĺn $\Delta = l_A - l_B$ je celočíselným násobkom vlnovej dĺžky λ. Pre $L \gg d$ bude ale $\Delta \approx |BC|$ a uhol $|\sphericalangle BAC| \approx \theta$. Odtiaľ už ľahko nahliadneme, že platí

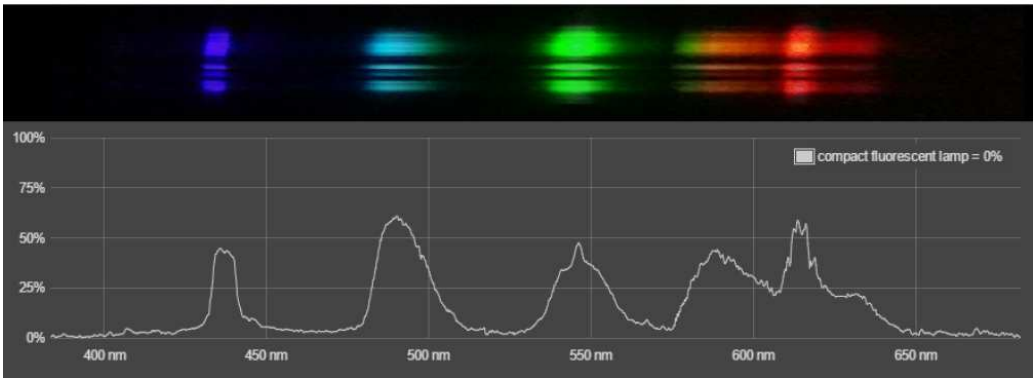
$$\sin\theta = \frac{\Delta}{d}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = \sin\theta d \overset{!}{=} n\lambda\,, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\,.$$

Ak prejdeme zo súradnice θ do súradnice popisujúcej polohu na detektore $y = L\tan\theta \approx L\theta$, vlnenia z jednotlivých štrbín sa zložia do maximálnej intenzity v bode

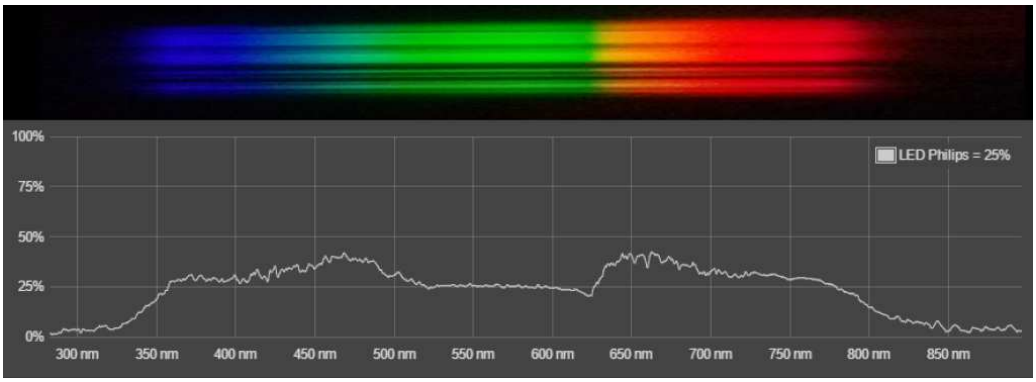
$$y = \frac{n\lambda L}{d}\,.$$

Vidíme, že maximá jednotlivých vlnových dĺžok sa budú nachádzať na rôznych miestach na detektore – svetlo sa teda rozštiepi na spektrum. Toľko k tomu ako funguje samotný spektroskop a teraz sa pustime k samotnému experimentu.

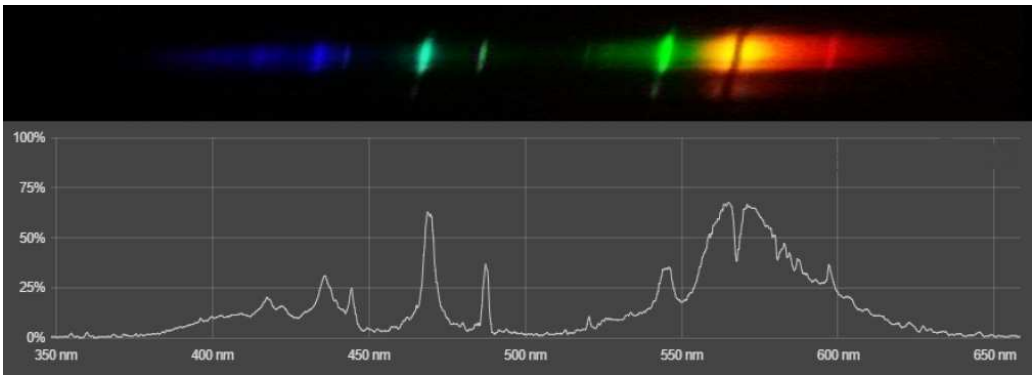
Na začiatok musíme pochváliť päticu riešiteľov - Michaelu Leinwatherovú, Hanku Mertanovú, Barboru Pulmannovú, Paulínu Smolárovú a Martina Mareka, ktorí odviedli neuveriteľne dobrú robotu. Sladká odmena ich neminie. Najkrajšie spektrá (dokonca krajšie ako nám :)) sa podarilo vytvoriť Miške. Preto sme sa rozhodli namiesto našich výtvorov uverejniť tie Miškine, aby ste sa mohli kochať aj vy ;). Vybrali sme jej tri najkrajšie. Na hornej fotke sa vždy nachádza odfotené spektrum a na tej dolnej jeho analyzovaná podoba pomocou stránky zo zadania. V popise pripájame aj bližšie informácie o zdroji svetla, tak ako nám ich poslala Miška.



Obr. 5: Kompakná žiarivka IKEA, 11 W, 600 lm, 230 V



Obr. 6: LED žiarovka Philips,13 W, 1055 lm, 2700 K, 230 V



Obr. 7: Pouličná lampa (sodíková žiarivka); všimnite si typické spektrálne čiary

Samotnú chybu merania môžeme odhadnúť pomocou šírky spektrálnej čiary sodíku, ktorý použijeme na kalibráciu, čo je približne 30 nm. Ďalšie chyby vznikajú pri samotnej tvorbe fotky. Fotoaparáty obsahujú množstvo algoritmov, ktoré sa snažia optimalizovať fotku tak, aby bola čo najviac okulahodiaca. Ak chceme čo najlepšie dáta, naistejšie je zobrať poriadny foťák, nastaviť manuálny režim, pohrať sa s expozíciou a citlivosťou a fotiť do formátu *RAW*, do ktorého sa ukladá priamo intenzita svetla, ktorá dopadá na senzor vo foťáku. No aj s obyčajnými foťákmi a pár minutách snahy sa dajú získať celkom slušné výsledky.

Na záver by sme ešte radi upozornili na pomerne častú chybu a spôsob ako ju odstrániť. Mnohým z vás sa podarilo odfotiť celkom slušné spektrá, no analyzované spektrum vyzeralo plus-mínus ako rovná čiara. Vtedy sa oplatí s fotkou pohrať, správne ju otočiť a orezať ju tak, aby program analyzoval to, čo už naozaj má – teda vaše spektrum a nie všetky veci naokolo. Oplatilo sa teda fotky ešte kúsok spracovať. V tomto prípade to stálo riešiteľov tri body.

3.5 B4/A2 – Svetelná komunikácia (opravoval Kubo, vzorák Kvík)

Vladko má kamarátov po celom sídlisku. A keďže býva v paneláku na kopci, mnohým z nich vidí do okien. V rámci dobrých susedských vzťahov sa po nociach baví „svetelnou komunikáciou“. Z bežného domáceho haraburdia vyhrabal zelené laserové ukazovadlo s výkonom 5 mW, výstupným priemerom lúča

1 mm a rozbiehavosťou 1 mrad. Z akej najväčšej vzdialenosti môže vidieť bodku svetla na matnom bielom povrchu? A v akej najväčšej vzdialenosti uvidí kamarát svetielko, keď mu Vladko zasvieti do oka[9]?

Pevne dúfame, že ste úlohu všetci prežili v zdraví a stále máte aspoň jedno funkčné oko na čítanie vzoráku :-).

Budeme ignorovať niektoré javy, ktoré výsledok príliš neovplyvnia, zato nám riadne znepríjemnia počítanie, napríklad rozptyl svetla vo vzduchu. Takisto zanedbáme výstupný priemer lúča – je totiž omnoho väčší, než je vlnová dĺžka laseru, takže difrakcia nebude ktovieako zaujímavá; a na druhej strane zas omnoho menší, než je priemer laserovej „bodky“ vo veľkej vzdialenosti. Okrem toho si ešte uvedomíme, že všetky uhly v úlohe sú veľmi malé, takže tangensy a sínusy si môžeme rovno nahradiť ich argumentami.

V tomto priblížení je lúč Vladkovho laseru kužeľ s vrcholovým uhlom 1 mrad. Závislosť polomeru bodky od vzdialenosti je $r(d) = d \cdot \arctan(1/1\,000) \approx d/1\,000$, jej intenzita klesá so štvorcom vzdialenosti a v každom priereze je konštantná.

Farba laseru už ale dôležitá je, pretože ľudské oko nie je rovnako citlivé na všetky vlnové dĺžky. Našťastie je oko najcitlivejšie práve na zelenú farbu, konkrétne 555 nm, a bežný zelený laser má vlnovú dĺžku 532 nm. Tento rozdiel je ešte pomerne malý, takže ho budeme môcť takisto zanedbať. Pri červenom alebo modrom laseri by sme si to však už nemohli dovoliť.

Poďme najprv odpovedať na druhú otázku. Hneď vieme povedať, že pri pohľade z diaľky je laser prakticky bodový zdroj. Dobrým štandardom, voči ktorému môžeme intenzitu svetla z bodového zdroja porovnávať, sú hviezdy. Za ideálnych podmienok a s očami dobre prispôsobenými úplnej tme dokáže človek vidieť hviezdu šiestej magnitúdy. Internet[10] nám s radosťou povie, že intenzita osvetlenia od takej hviezdy je $E_{\mathrm{ref}} = 8{,}3 \cdot 10^{-9}$ lx.

Svetelný tok z lasera je $5\ \mathrm{mW} \cdot 683\ \mathrm{lm\,W^{-1}} = 3{,}42$ lm. Teraz nám ostane už len zistiť, s akým najväčším polomerom bodky môžeme dosiahnuť intenzitu aspoň $8{,}3 \cdot 10^{-9}$ lx. To zistíme nasledovne:

$$\frac{3{,}42\ \mathrm{lm}}{\pi r_{\mathrm{bodka}}^2} = 8{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{lx} \qquad \text{a teda} \qquad r_{\mathrm{bodka}} = \sqrt{\frac{3{,}42\ \mathrm{lm}}{\pi \cdot 8{,}3 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{lx}}} \approx 11\,400\ \mathrm{m}\,.$$

Už sme spočítali, že vzdialenosť od zdroja je tisíckrát väčšia, než polomer bodky, takže Vladkov kamarát od neho môže byť najviac 11 400 km.

Alternatívne môžeme zistiť, koľko fotónov Vladkov laser vyžiari za sekundu. Energia jedného fotónu je $\varepsilon = hc/\lambda$ a spolu za sekundu laser vyžiari N fotónov s celkovou energiou $E = N\varepsilon = Nhc/\lambda = 5$ mJ. Z tohoto si vyjadríme N ako

$$N = \frac{E\lambda}{hc} = \frac{5\ \mathrm{mJ} \cdot 532\ \mathrm{nm}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}} \approx 1{,}34 \cdot 10^{16}\,.$$

Následne zistíme, koľko fotónov stačí na to, aby svetlocitlivá tyčinka v oku niečo zaznamenala. Ukazuje sa, že pre krátke záblesky to je zhruba $k = 100$ fotónov[11]. Vladkov laser však svieti neustále, takže budeme musieť náš odhad trochu upraviť. Ak niečo tušíme o tom, ako

[9] Toto vážne NIE JE experimentálka. Ak to silou-mocou chcete vyskúšať, 200 metrov je minimálna rozumná vzdialenosť.

[10] Napríklad `https://en.wikipedia.org/wiki/Lux#Non-SI_units_of_illuminance`.

[11] Uvádzané konštanty sa líšia - viď `http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Quantum/see_a_photon.html`.

rýchlo funguje oko[12], môžeme odhadnúť, že $n \approx 2\,500$ fotónov za sekundu z bodového zdroja by už malo spoľahlivo stačiť na to, aby sme niečo videli.

Znovu nám stačí zistiť, v akej vzdialenosti od zdroja je pomer plochy zreničky ($r_{\text{zrenička}} \approx 3$ mm) a laserovej „bodky“ taký, aby nám na sietnicu dopadlo n fotónov za sekundu. Polomer opäť vyjadríme z trojčlenky

$$\frac{\cancel{\pi} r_{\text{zrenička}}^2}{\cancel{\pi} r_{\text{bodka}}^2} = \frac{N}{n},$$

odkiaľ

$$r_{\text{bodka}} = \sqrt{\frac{N}{n}} \cdot r_{\text{zrenička}} = \sqrt{\frac{1{,}34 \cdot 10^{16}}{2\,500}} \cdot 3 \text{ mm} \approx 6\,950 \text{ m}.$$

a už vieme, že takýto polomer bude mať bodka vo vzdialenosti 6 950 km. Získané výsledky sú približne rovnaké, takže môžeme byť spokojní a vyhlásiť, že to bude rádovo 10 000 kilometrov. Pravdaže, tento výpočet platí iba vo vákuu – vo vzduchu by sa intenzita svetla ešte exponenciálne zmenšovala a závisela by od množstva vodnej pary a iných nečistôt v ňom.

Teraz sa vrátime k prvej otázke. Dokonale matný biely povrch odrazí všetko dopadajúce svetlo rovnomerne do všetkých smerov. Musíme si však uvedomiť, že z povrchu vidno len polovicu celého priestoru, teda 2π steradiánov. Vladko má oko hneď pri laseri, takže uhlový rozmer bodky musí byť preňho rovnaký, ako divergencia lúča. Aká časť svetla γ doletí späť do Vladkovho oka? Stačí porovnať plochu celej polgule s polomerom D s plochou Vladkovej zreničky[13].

$$\gamma = \frac{\cancel{\pi} r_{\text{zrenička}}^2}{2\cancel{\pi} D^2}$$

Rozlišovacia schopnosť ľudského oka je asi jedna uhlová minúta, čiže asi 1/3 437 radiánu. Priemer bodky je 1/500 radiánu, asi 6,9 - krát toľko, a jej plocha je zhruba 50 - krát väčšia. To je už dosť na to, aby sme bodku nepokladali za bodový zdroj. Pravdepodobne sa na sietnici nezobrazí na jedinú bunku, ale na rádovo päťdesiat. Mozog však dokáže so spracovaním obrazu robiť parádne veci – keď trochu pohľadáme, zistíme, že napríklad galaxia M33 s magnitúdou 5,7 je voľným okom stále slabo viditeľná, aj keď má rozmery rádovo v stupňoch. Na uhlovej veľkosti teda asi záležať nebude.

Odpoveď na prvú otázku spočítame pomocou počtu fotónov. Všetky potrebné údaje už máme, takže stačí zo vzorca pre γ vyjadriť vzdialenosť a dosadiť, čím dostaneme

$$D = \sqrt{\frac{N}{2n}} \cdot r_{\text{zrenička}} = \sqrt{\frac{1{,}34 \cdot 10^{16}}{5\,000}} \cdot 3 \text{ mm} = 4\,911 \text{ m}.$$

Pri fixnej divergencii lúča teda platí, že vzdialenosť, z ktorej vidíme odrazenú bodku, je $1\,000 \cdot \sqrt{2} \approx 1\,400$ - krát menšia, ako vzdialenosť, z ktorej môžeme vidieť svetielko priamo. Sa-

[12] Napríklad z toho, že na dobrú ilúziu pohybu musíme film premietať rýchlosťou aspoň 24 obrázkov za sekundu.

[13] Pre ideálny lambertovský odraz (`https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert's_cosine_law`) bude intenzita na osi roviny ešte 2 - krát väčšia, ale s tým sa už trápiť nebudeme – ak by sa nám veľmi chcelo, výsledok vynásobíme ešte $\sqrt{2}$.

mozrejme, rovnaký argument platí aj pri počítaní cez intenzity, takže napriek všetkým zjednodušeniam môžeme povedať, že odrazenú bodku za ideálnych podmienok uvidíme zo vzdialenosti asi piatich kilometrov.

3.6 A3 – Záhadné rakety (opravoval Kvík)

Náš Fest Kozmický Superprogram má veľký problém. Chystali sme sa totiž vypustiť do vesmíru raketu. Lenže pri prerátaní spotreby paliva nám vyšlo, že by sme porušili niektoré všeobecne záväzné nariadenia. Konkrétne zákon zachovania energie.

Uvažovali sme nejako takto. Termodynamický výkon je definovaný ako množstvo energie uvoľnenej v chemickej reakcii za jednotku času. Mechanický výkon je časová zmena celkovej mechanickej energie, alebo tiež sila násobená rýchlosťou. Náš raketový motor spaľuje palivo stálym tempom, takže jeho ťah musí byť určite konštantný. Zato rýchlosť rakety neustále narastá – ak teda pôsobíme rovnakou silou pri čoraz väčšej rýchlosti, po nejakom čase môže dôjsť k tomu, že mechanický výkon rakety presiahne termodynamický. Je to naozaj možné, alebo sme niekde v úvahe spravili chybu?

Žiadne iné sily (odpor vzduchu, Coriolisova sila, zlomyseľní mimozemšťania s veľkým magnetom...) na raketu nepôsobia. Pre jednoduchosť uvažujeme homogénne tiažové pole.

Zrada je v tom, že reaktívny motor má aj iný zdroj energie, než je schovaná v chemických väzbách v palive. Jeho vplyv je však v počiatočných fázach letu malý. Zaujímavý začne byť až neskôr, keď rýchlosť rakety dostatočne narastie. Týmto magickým zdrojom je kinetická energia paliva. Pravdaže, aj tá musí mať pôvod v energii chemických väzieb: aby palivo malo nejakú kinetickú energiu, musí ho najprv ten istý motor roztlačiť. Celková získaná energia samozrejme nielenže nemôže presiahnuť chemickú energiu paliva, ale bude tvoriť len jej maličký zlomok.

Úloha sa dá kompletne vyriešiť integrovaním, to by však bolo zbytočne zdĺhavé.[14] Aby sme si našu predstavu nekomplikovali, nebudeme sledovať celkovú mechanickú, ale iba kinetickú energiu rakety. Všetko ostatné, vrátane energie potrebnej na prekonanie gravitačných síl, totiž môžeme považovať za straty. A tie nás vôbec zaujímať nemusia: v zadaní je napísané, že časová zmena kinetickej energie má presiahnuť termodynamický výkon motora. Ak sa časť energie z motora niekde stráca, znamená to iba toľko, že musíme nájsť o to bohatší zdroj, ktorý to bude kompenzovať. Čiže ak ukážeme, že účinnosť presiahne sto percent s týmto zanedbaním, v skutočnosti bude ešte vyššia.

Navyše ak má raketa okrem kinetickej ešte aj nejakú potenciálnu energiu, nič to nepokazí: raketa stúpa a zrýchľuje, takže jej potenciálna energia voči kozmodrómu a jej časová zmena sú vždy kladné, takže celková mechanická energia a výkon budú ešte väčšie. No a ak na stratách nezáleží, nech teda nemáme žiadne: povieme si, že všetka energia chemických väzieb sa mení na kinetickú energiu unikajúcich plynov alebo rakety a zároveň ignorujeme gravitačné pôsobenie. Takže podstatné bude už len to, či kinetickú energiu získa samotná raketa, alebo spaliny.

Označme rýchlosť rakety $w(t)$, motor spaľuje palivo hmotnostnou prietokovou rýchlosťou μ $\mathrm{kg\,s^{-1}}$ a spaliny chrlí rýchlosťou v vzad. Jeho termodynamický výkon (pri predpokladanej stopercentnej účinnosti) potom musí byť $P_\mathrm{m} = 0{,}5\,\mu v^2$. Keďže energia sa zachováva v každom okamihu, musí platiť, že súčet časovej zmeny kinetickej energie rakety $\mathrm{d}E_\mathrm{r}/\mathrm{d}t = P_\mathrm{r}$ a plynov $\mathrm{d}E_\mathrm{p}/\mathrm{d}t = P_\mathrm{p}$ je rovný výkonu motora P_m, teda $P_\mathrm{r} + P_\mathrm{p} = P_\mathrm{m}$.

[14] Na druhej strane to zodpovie omnoho viac otázok, než len tú, na ktorú sme sa pýtali – ak sa na to cítite, rozhodne odporúčam to urobiť.

V okamihu štartu ($t = 0$) raketa stojí a motor nekoná žiadnu užitočnú prácu – všetka chemická energia sa mení na kinetickú energiu spalín a rakete nezostane nič: $P_\mathrm{r} = 0$ a $P_\mathrm{m} = P_\mathrm{p}$. Lenže hybnosť celej sústavy sa musí zachovávať: za každý 1 $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$, ktorý odnesú plyny z motora, musí raketa 1 $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$ získať. Začne teda zrýchľovať, spolu so zvyšným palivom, ktoré si nesie v nádržiach.

Čo sa bude diať ďalej? Ako rýchlosť rakety narastá, veľkosť rýchlosti spalín voči zemi bude klesať, až raz bude výtoková rýchlosť plynov polovičná oproti rýchlosti rakety v sústave kozmodrómu ($w = v/2$). Motor z molekúl paliva uvoľní väzbovú energiu a využije ju na ich urýchlenie smerom dozadu. Veľkosť ich rýchlosti ostane rovnaká, ale jej smer sa zmení na opačný, takže kinetická energia v sústave kozmodrómu sa nezmení ($P_\mathrm{p} = 0$). Všetka energia teda ostane rakete, ktorá ju s neskrývanou radosťou použije na zväčšenie svojej rýchlosti.

Napokon rýchlosť rakety prerastie polovicu výtokovej rýchlosti plynov ($w > v/2$). Palivo po spálení (napriek tomu, že uvoľnilo svoju chemickú energiu a vďaka nej voči rakete získalo rýchlosť v) kinetickú energiu stratilo – klesla z $0{,}5(\mu \mathrm{d}t)w^2$ na $0{,}5(\mu \mathrm{d}t)(w-v)^2$. A od tejto chvíle je účinnosť rakety naozaj vyššia, než 100 %.

Napriek tomu je však raketový pohon ako celok zúfalo neefektívny – takmer všetka energia nakoniec ostane v neužitočnej kinetickej energii spalín. Problém je v tom, že raketa je na začiatku letu veľmi ťažká a teda zrýchľuje iba pomaly. Priveľa času strávi v neefektívnom režime pri malých rýchlostiach a veľkú väčšinu paliva spotrebuje práve na urýchlenie seba a zvyšnej malej časti paliva. Keby sme zvýšili výtokovú rýchlosť plynov, zmena rýchlosti Δv a celkový impulz sily síce budú väčšie, takisto však potrvá dlhšie, kým dosiahne potrebnú rýchlosť.

3.7 A4 – Interstelárna (opravoval Maťo B)

Andrej si v zime, mimo práce na novom urýchľovači okolo Matfyzu, krátil dlhé večery pozorovaním nočnej oblohy. Kde tu znenazdajky objavil dvojhviezdu.[15] Andrejovi sa podarilo o dvojhiezde s pracovným názvom "Jajko" získať pomerne dosť informácií, no bohato by mu stačilo vedieť, ako ďaleko sa "Jajko" nachádza od jeho maličkosti.

Andrej zistil nasledujúce údaje. Perióda obehu hviezd okolo spoločného ťažiska $T = 86\,400$ s, $m_1 = 4{,}45$ a $m_2 = 12{,}5$ sú zdanlivé hviezdne veľkosti[16] a taktiež si odmeral, že dvojhviezdu vytína na oblohe maximálny uhol $\alpha = 7{,}76 \times 10^{-6}$ rad. Pre jednoduchosť môžete predpokladať, že hviezdy obiehajú okolo svojho spoločného ťažiska po kruhových dráhach.

Andrej si na určenie vzdialenosti dvojhviezd našiel v jednej múdrej knižke nasledujúci algoritmus:

(i) Najprv hmotnosti oboch hviezd položíme rovné hmotnostiam Slnka.

(ii) Z hmotností hviezd a periódy obehu na základe Newtonových zákonov určíme maximálnu vzdialenosť a hviezd medzi sebou.

(iii) Na základe vzdialenosti a a uhlu α si vypočítame vzdialenosť dvojhviezdy d od Andreja.

(iv) Túto vzdielenosť d následne použijeme na nový odhad hmotnosti hviezd, a to tak, že si z relatívnych hviezdnych veľkostí vypočítame ich svietivosť. Na tento výpočet môžete použiť tento vzorec [17].

[15] "Dvojhviezda" je systém, kde dvojica hviezd obieha okolo spoločného ťažiska.
[16] `http://en.wikipedia.org/wiki/Apparent_magnitude`
[17] `http://en.wikipedia.org/wiki/Luminosity#Magnitude_formulae`

(v) Zo svietivostí hviezdy použitím vzťahu medzi hmotnosťou hviezdy a jej svietivosťou[18] získame lepší odhad ich hmotností a vrátime sa k bodu 2.

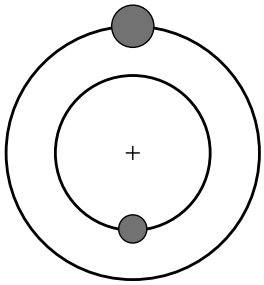
Tento postup opakujeme, kým rozdiel v hodnote d je medzi dvomi iteráciami vyšší ako jedno percento. Pri riešení tejto úlohy vysoko odporúčame využiť nejaký tabuľkový procesor alebo vaše programátorské schopnosti.

Metóda, ktorú ste mali za úlohu implementovať, sa nazýva *Dynamic parallax*[19] a naozaj sa používa na určovanie vzdialenosti dvojhviezd. Na určenie vzdialenosti ale potrebujeme už poznať niekoľko parametrov o dvojhviezde, ktoré vieme získať napr. zo spektrálnej analýzy žiarenia, či dôsledného merania svietivosti dvojhviezdy v čase. Tieto údaje ste mohli nájsť v zadaní. V skutočnosti je meranie uhla o kúsok náročnejšie, ale my si pre jednoduchosť vystačíme s faktom, že dvojhviezda je tak ďaleko, že sa nám zdá, ako keby na oblohe vytínala maximálny uhol α. Z tejto informácie potom vieme na základe znalosti maximálnej vzdialenosti hviezd a medzi sebou určiť vzdialenosť dvojhviezdy d od nás

$$d = \frac{a}{2\tan(\alpha/2)} \approx \frac{a}{\alpha}\,. \tag{1}$$

Poďme sa pozrieť, ako preložiť jednotlivé kroky algoritmu do reči rovníc a následne si ukážeme, ako všetky vedomosti spojiť do jedného funkčného kódu.

Najprv sa pozrime, ako určiť na základe hmotnosti hviezd a periódy obehu vzdialenosť hviezd a medzi sebou. Pozor, hmotnosti budeme označovať veľkými písmenami - M_1 a M_2, zdanlivé hviezdne veľkosti v súlade so zadaním malými písmenami - m_1 a m_2. Na celú situáciu bude výhodné sa pozrieť vo vzťažnej sústave spojenej so spoločným ťažiskom hviezd. To preto, lebo takúto sústavu môžeme prakticky považovať za *izolovanú*. Nutne tak musí platiť zákon zachovania hybnosti sústavy. Naviac, ak sa presunieme do takej sústavy, kde ťažisko dvojhviezdy stojí, tak veľmi jednoducho vieme opísať pohyb hviezd okolo spoločného ťažiska.



Obr. 8: Vyznačené kruhové trajektórie hviezd okolo spoločného ťažiska

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Mass\%E2\%80\%93luminosity_relation
[19] http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_parallax

Ak si v sústave spojenej s hviezdou uvedomíme, že hviezdy nemenia vzdialenosť od spoločného ťažiška, musí platiť rovnováha síl v radiálnom smere[20]. To nám umožňuje vyjadriť:

$$a = a_1 + a_2\,, \tag{2}$$

$$G\frac{M_1 M_2}{a^2} = M_1 \frac{4\pi^2}{T^2} a_1\,, \tag{3}$$

$$G\frac{M_1 M_2}{a^2} = M_2 \frac{4\pi^2}{T^2} a_2\,. \tag{4}$$

$$\tag{5}$$

Spojením (3) a (4), (2) získame po úprave všeobecný tvar *tretieho Keplerovho zákona*

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 G}{4\pi^2}(M_1 + M_2)}\,. \tag{6}$$

Vzdialenosť d neskôr vypočítame na základe rovnice (1).

Teraz využijeme namerané svietivosti hviezd z relatívnych hviezdnych veľkostí. Otvoríme si teda wiki[21] a vyjadríme si svietivosť hviezdy[22]:

$$\frac{L_{\text{hviezda}}}{L_\odot} = \left(\frac{d_\odot}{d_{\text{dvojhviezda}}}\right)^2 10^{\frac{1}{1{,}25}(m_{\text{hviezda}} - m_\odot)}\,. \tag{7}$$

Na wiki môžeme taktiež nájsť informáciu o tom, že relatívna hviezdna veľkosť Slnka je $m_\odot = -26{,}74$. Tento pomer využijeme v ďalšom kroku, kde predpokladáme, že hmotnosť hviezd sa pohybuje v rámci intervalu $2M_\odot < M_1\,, M_2 < 20M_\odot$. Pre tieto hviezdy, tzn. hviezdy z *hlavnej postupnosti*, vieme aplikovať vzťah zo zadania[23]

$$\frac{M_{\text{hviezda}}}{M_\odot} = \left(\frac{L_{\text{hviezda}}}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{3{,}5}}\,. \tag{8}$$

Všimnime si, že vo vzorcoch sa nám neraz vyskytli pomery $L_{\text{hviezda}}/L_\odot$ resp. $M_{\text{hviezda}}/M_\odot$. Tie sme zaviedli kvôli väčšej presnosti výpočtov – pomocou týchto pomerov sa efektívne vyhneme násobeniu a deleniu veľkých čísel.

Rovnice (6), (1), (7) a (8) potom prejdú na kompaktnejší tvar:

$$\begin{aligned}
a &= C\sqrt[3]{(M_1 + M_2)}\,, C = \sqrt[3]{\frac{T^2 G}{4\pi^2}}\frac{1}{d_\odot}\,,\\
d &= \frac{a}{\alpha}\,,\\
L_{\text{hviezda}} &= \left(\frac{1}{d_{\text{dvojhviezda}}}\right)^2 10^{\frac{1}{1{,}25}(m_{\text{hviezda}} - m_\odot)}\,,\\
M_{\text{hviezda}} &= (L_{\text{hviezda}})^{\frac{1}{3{,}5}}\,.
\end{aligned}$$

[20] Veľkosť gravitačnej sily musí byť rovná veľkosti odstredivej sily vo vzťažnej sústave spojenej s hviezdou.
[21] `http://en.wikipedia.org/wiki/Luminosity#Magnitude_formulae`
[22] Indexom $\odot$ označujeme veličiny súvisiace so Slnkom.
[23] `http://en.wikipedia.org/wiki/Mass\%E2\%80\%93luminosity_relation`

Postup zo zadania budeme opakovať, až pokiaľ nebude relatívny rozdiel vo vzdialenosti d medzi krokmi menší ako 0,01.

Teraz si môžeme zobrať obľúbený programovací jazyk (*C++, Python, Java, ...*), otvoriť tabuľkový procesor (*Excel, OpenCalc*), či nejaké matematické prostredie (*Octave, Matlab, Mathematica*). Možností je veľa – my si ukážeme tentoraz implementáciu kódu v *C++*, aj keď by sme si vystačili s tabuľkovým procesorom. Chceme sa predsa učiť nové veci, nie?

```
#include <iostream>
#include <cmath>

using namespace std;

//Zadefinovanie konstant (t.j. veci, ktore sa nechystame menit)
//pouzivame zakladne jednotky SI
#define PI 3.14159265359
#define m_sun -27.74
#define m_1 4.45
#define m_2 12.5
#define Mass_sun 1.98855E30
#define G 6.673E-11
#define L_sun 3.846E26
#define d_sun 149597871000
#define T 280
#define alpha 10E-6
//Konstantu C sme sem kvoli preteceniu premennych zadali rovno uz vypocitanu
#define C 0.019569649614816720

int main()
{
    //Inicializacia dat
    long double d, d_pred, a, Mass_1, Mass_2, Lum_1, Lum_2;
    d = Mass_1 = Mass_2 = 1;
    d_pred = a = 0;

    //Iterujeme pokial neklesne relativna chyba pod jedno percento
    while (fabs(d-d_pred)>0.01) {
        d_pred = d;
        a = C*pow(Mass_1+Mass_2,1/3.0);
        d = a/alpha;
        Lum_1 = pow(d,-2)*pow(10,1/2.5*(m_1 - m_sun));
        Lum_2 = pow(d,-2)*pow(10,1/2.5*(m_2 - m_sun));
        Mass_1 = pow(Lum_1,1/3.5);
        Mass_2 = pow(Lum_2,1/3.5);;
        cout << Mass_1 << " " << Mass_2 << " " << d << endl;
    }

    return 0;
}
```

Listing 1: Kód programu

A s potešením zistíme, že dvojhviezda "Jajko" sa nachádza vo vzdialenosti 11 652 - násobku vzdialenosti Slnka od Zeme, čo je teda strašne blízko. Na svetelné roky je to niečo viac ako

0,84 ly. Pre porovnanie, najbližšia hviezda k Zemi[24] - Proxima Centauri, je vzdialená približne 4,22 ly. Vidíme teda, že Andrej sa najskôr pri pozorovaní hviezd pomýlil a žiadna dvojhviezda Jajko neexistuje.

[24] Okrem Slnka :).