



Fyzikálny korešpondenčný seminár

30. ročník, 2014/2015

FKS, KTFDF FMFI UK, Mlynská dolina, 84248 Bratislava

e-mail: otazky@fks.sk

web: <http://fks.sk>

Vzorové riešenia 3. kola zimnej časti 2014/2015

3.1 B0 – Okolo Žiaru (opravoval Kubo C)

Všetci vieme, že zabehnúť si takých 5 kilometrov nie je vždy tá istá námaha. Inak sa totiž behá na peknom rovnom asfalte a inak do šialeného kopca. Druhá možnosť je očakávateľne obtiažnejšia. Preto sa veľakrát oplatí si na beh zobrať so sebou malý počítač, ktorý meria okrem nabehanej vzdialenosti aj výškové stúpania či klesania, vďaka čomu vieme reálnejšie povedať, koľko sme sa „namakali“. Ak sme však šikovní, tak nepotrebujeme ani ten počítač, ale stačí sa poriadne pozrieť na mapu.

K dispozícii vám dávame mapu, na ktorej sú vyznačené dva body: *A* a *B*. Načrtnite výškový profil trasy, ktorá vedie úplne priamo z *A* do *B*. Na grafe taktiež vyznačte niektoré hodnoty prevýšenia pre konkrétne zabehnuté vzdialenosti od miesta počiatku.

Mapu nájdete na stránke fks.sk/mapa.

Tento príklad nie je až taký zložitý na premýšľanie ako skôr na prácu. Ideálne by bolo, kebyže poznáme nadmorskú výšku každého jedného bodu a tie len vynesieme do grafu a máme to. Ale to my bohužiaľ nevieme až tak presne a preto môžeme pracovať iba s tým, čo vieme zistiť.

Začnime tým, že si stiahneme mapu a pomocou mierky zistíme, akú dlhú trasu vlastne máme prejsť. Na meranie môžeme použiť buď staré dobré pravítko, alebo môžeme vygoogliť nejaký softvér, ktorý urobí špinavú robotu za nás. My sme skombinovali tieto metódy a použili sme skicár. Skicár totiž ukazuje, na ktorom pixeli sa práve nachádza kurzor. Vďaka tomu sme zistili, že 1 km meria 161 pixelov. Pomocou pixelov¹ už viem veľmi ľahko určiť ľubovoľnú vzdialenosť na mape. Ak ste dobre merali, mali by ste dostať vzdialenosť približne 3,58 km.

Keď už vieme, čo dať na x-ovú os nášho grafu, zostáva iba posledná otázka. Čo dáme na y-ovú? Musíme nájsť nejaké význačné body, v ktorých zistíme nadmorskú výšku, a tú poznáme iba na vrstevniciach. Čiže sa nám ponúka priamočiare riešenie. Každý bod, v ktorom sa spojnice bodov *A* a *B* preťala s vrstevnicou si teraz odmeriame a zapíšeme do tabuľky jeho vzdialenosť od začiatku (bod *A*) a jeho nadmorskú výšku.²

Tieto body si teraz vynesieme do grafu. Body grafu môžeme následne pospájať, čím dostaneme výsledný výškový profil našej trasy. V takom prípade nám však vzniknú isté ostré hrany na našej trase, čo sa v prírode bežne nevidí. Preto by bolo vhodnejšie preložiť grafom nejakú

¹a Pytagorovej vety

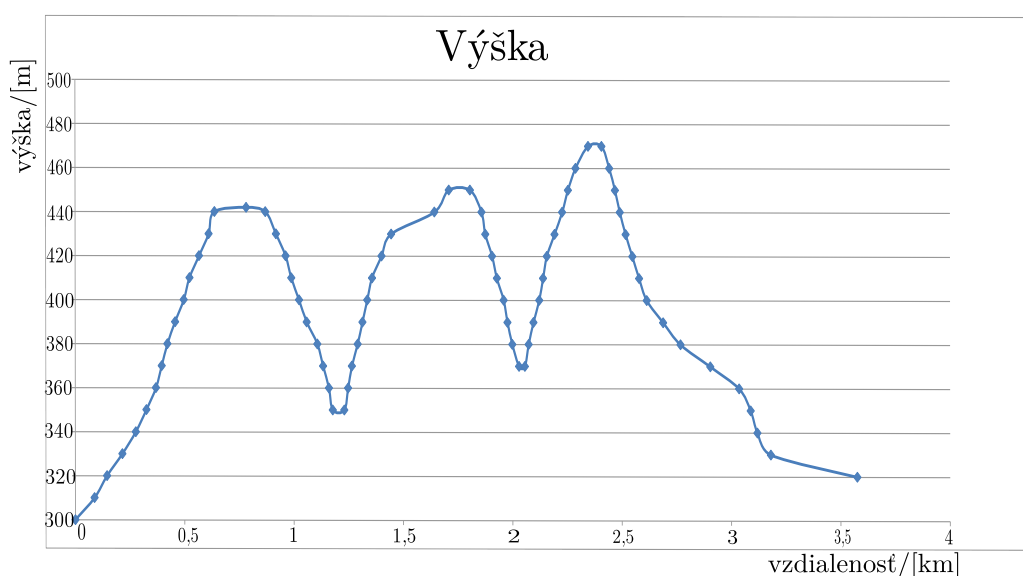
²Vzhľadom na to, že týchto bodov je 73, uvedieme iba zopár z nich.

Ďakujeme sponzorom a podporovateľom seminára:



Vzdialenosť [m]	0	325	496	782	1024	1177	1230
Výška [m]	300	350	400	442	400	350	350
Vzdialenosť [m]	1335	1709	1806	1959	2030	2056	2122
Výška [m]	400	450	450	400	370	370	400
Vzdialenosť [m]	2254	2346	2407	2469	2614	3088	3576
Výška [m]	450	470	470	450	400	350	320

krivku, ktorá bude spájať všetky naše body, aby sme dostali pekný a hladký výškový profil. Po dokončení našej práce by mal výškový profil vyzeráť asi takto:



Obr. 1: Výškový profil

3.2 B1 – FKS Čajovňa (opravoval Vladko)

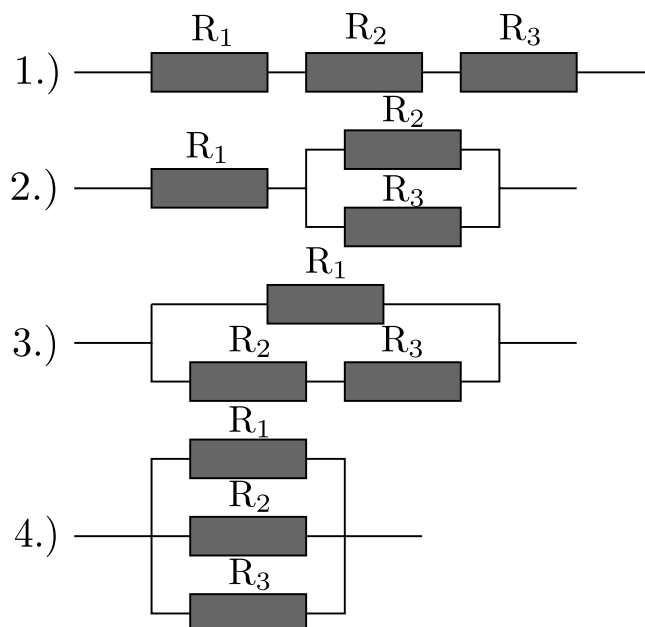
Predstavte si, že by k vám na návštevu prišli traja FKS vedúci. A že by ste ich chceli aj niečím ponúknuť. Kofolou? Nie, to nie je ono. Chce to niečo poriadnejšie. Čaj? To už znie lepšie. Čaj ale treba uvariť. To si ale spomeniete, že doma máte akurát 3 veľké kanvice, pričom v každej z nich uvaríte vodu maximálne tak na jeden čaj. Nevadí, dá sa to variť súčasne. Na to ale treba elektriku...

K dispozícii doma máte len jeden zdroj konštantného napätia a veľa povaľujúcich sa vodičov. Vy im ten čaj chcete doniesť čo najskôr, tak hľadáte najefektívnejší spôsob, akým pozapájať 3 kanvice, zdroj a vodiče tak, aby ste mali dostatok ohriatej vody. Ako by ste to urobili? FKS čaká...

Na to aby sme zohriali vodu v kanviciach, musí byť vykonaná práca W . Asi nie je potrebné zvlášť vysvetľovať, že táto práca nezávisí od nášho zapojenia, pretože W je rozdiel medzi vnútornou energiou studenej a teplej vody. Tento rozdiel je konštantný bez ohľadu na to, akým spôsobom vodu zohrejeme. My chceme prácu vykonať čo najrýchlejšie, teda potrebujeme, aby zapojené kanvice mali čo najväčší výkon $P = W/t = U^2/R$. To znamená, že musíme minimalizovať odpor a maximalizovať napätie.

Napätie nemôžeme meniť, lebo podľa zadania máme zdroj konštantného napätia. Odpor jednej kanvice je určený parametrami jej špirály, teda ho tiež nevieme ovplyvniť, no vieme rôznym zapojením kanvíc dostať rôzny odpor celej schémy.

Kanvice sa v obvode správajú ako rezistory s odporom R . Tri rezistory môžeme zapojiť štyrmi nasledovnými spôsobmi:³



Obr. 2: Možnosti zapojenia rezistorov

Teraz už len vypočítame celkový odpor jednotlivých schém a vyberieme tú s najmenším odporom.

Prvá schéma je sériové zapojenie a pre jej odpor platí $R_{c1} = R + R + R = 3R$.

Druhá schéma je trochu zložitejšia. Odpor R_2 a R_3 sú zapojené paralelne, takže ich vieme nahradiť rezistorom s odporom R_{23} , ktorý vypočítame nasledovne:

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R},$$

$$R_{23} = \frac{1}{2}R.$$

Teda celkový odpor druhej schémy je $R_{c2} = R + R_{23} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$.

Tretia schéma je podobne zrátkateľná ako druhá, lebo je to tiež iba sériové a paralelné zapojenie:

$$\frac{1}{R_{c3}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + R},$$

³Odpor rezistorov sú rovnaké, lebo máme rovnaké kanvice. Indexami sme ich rozlíšili len preto, aby sme sa lepšie orientovali vo výpočtoch

$$\frac{1}{R_{c3}} = \frac{3}{2R},$$

$$R_{c3} = \frac{2}{3}R.$$

Štvrtá, teda posledná schéma má odpor:

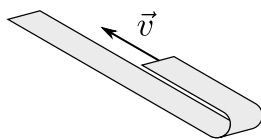
$$\frac{1}{R_{c4}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R},$$

$$R_{c4} = \frac{1}{3}R.$$

Ako vidíme, tak najmenší odpor má paralelné zapojenie. Výkon v tomto prípade je $P = 3U^2/R$ čo je najväčší možný výkon aký vieme pri zapojení troch rezistorov dostať. Takže ak chceme, čo najrýchlejšie zohriať čaj pre návštevu, tak musíme kanvice zapojiť paralelne.

3.3 B2 – Ducktape (vzorák Denda, opravovala Enka)

Stáva sa, že keď nešikovnejší človek pracuje s lepiacou páskou, tak sa mu odstrihnutý kus nalepí na nechcené miesto. Napríklad na stôl. Najefektívnejším odstránením tohto kusu pásky je chytiť jej jeden koniec a ťahať ho smerom k zvyšku pásky (viď obrázok). Vtedy sa odlepuje zaručene najjednoduchšie.



Obr. 3: Odliepanie pásky

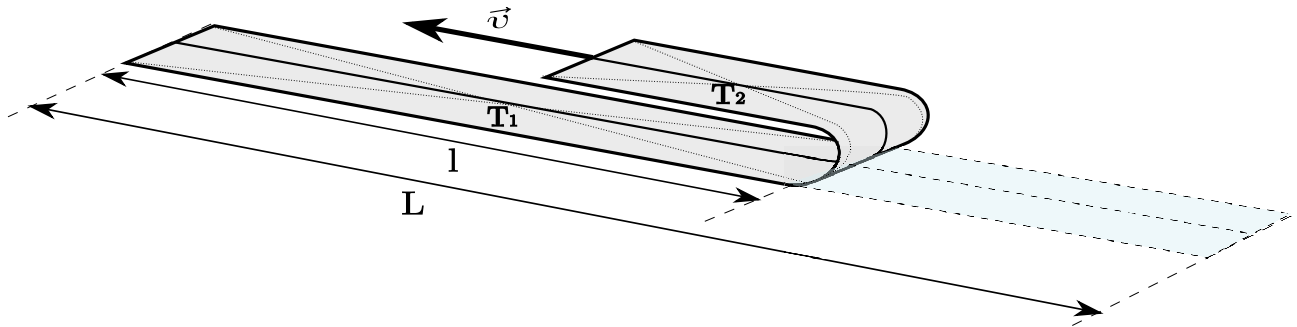
Úloha je nasledujúca: Povedzme, že sme sa stali tým nešťastníkom, ktorý si omylom nalepil na stôl kus lepiacej pásky dĺžky L . Teraz začneme ťahať jeden jej koniec rýchlosťou v spôsobom uvedeným vyššie. Aká je vzájomná rýchlosť ťažísk odlepenej a neodlepenej časti pásky?

Na začiatok si v rýchlosti zopakujeme, čo je to ťažisko. (Ak to nepotrebuje zopakovať, skočte rovno na tretí odsek.) Ťažisko je bod, ktorým si dokážeme aproximovať akýkoľvek hmotný objekt. Jeho výhodou je, že keď na dokonale tuhé teleso pôsobí nejaká sila, tak ju nemusíme rozkladať na zložky a zisťovať, ako pôsobí na každú jednu časticu (resp. molekulu alebo časť telesa), ale stačí nájsť bod, na ktorý keď bude pôsobiť celá táto sila, bude výsledný efekt rovnaký. Takže namiesto toho, aby sme počítali s nejakým komplikovaným útvarom, nám bude stačiť jediný bod. No nie je ťažisko čarovné? :)

Teraz sa nám tu objavuje nový problém: ako také ťažisko nájsť? Najjednoduchšie sa to dá vysvetliť asi na gravitácii. Predstavte si, že máme nejaký objekt, a tyč. My chceme ten objekt položiť na stojacu tyč tak, aby to zostalo stáť. Keďže na každú časticu telesa pôsobí gravitácia, vytvára táto častica voči podloženiu určitý moment sily. No a keďže my nechceme, aby sa nám to do tej strany prevrátilo (chceme aby sústava bola v rovnováhe), musí sa rovnaký moment sily objaviť aj na opačnej strane. Keď voči nejakému bodu budú všetky momenty vykompenzované, našli sme ťažisko. Z uvedeného vyplýva, že najľahšie sa ťažisko hľadá pri symetrických telesách.

Ťažisko vždy leží na osi (resp. strede) symetrie. A jééé, náš kus lepiacej pásky je symetrický :).

Našou úlohou je teda vypočítať vzájomnú rýchlosť dvoch ťažísk. Označme si l dĺžku prilepenej časti pásky, T_1 jej ťažisko a T_2 ťažisko odliapanej časti. Vďaka myšlienkam z predchádzajúceho odseku vieme, že obe ťažiská ležia na úsečke prechádzajúcej pozdĺžne stredom lepiacej pásky (rovnobežne s okrajmi). Tým mierime k tomu, že si môžeme celú lepiacu pásku nahradiť úsečkou dĺžky L . Ak pásku odliapame sprava, prisúdíme ľavému okraju úsečky polohu $x = 0$.



Obr. 4: Odliapaná lepiaca páska

Tak a teraz by asi bolo vhodné vyjadriť polohy ťažísk:

$$x_{T_1} = \frac{l}{2},$$

$$x_{T_2} = l - \frac{L-l}{2}.$$

Keď si spomenieme na to, že pásku odliapame rýchlosťou v , pokojne môžeme tvrdiť, že platí: $L-l = \frac{vt}{2}$ (koniec lepiacej pásky (bod, za ktorý ju držíme) síce prešiel dráhu $s = vt$, ale $L-l$ je len polovica (premýšľajte si :))). Z toho dostaneme: $l = \frac{2L-vt}{2}$. Teraz si to môžeme dosadiť do polôh ťažísk a dostaneme, že:

$$x_{T_1} = \frac{2L-vt}{4},$$

$$x_{T_2} = \frac{4L-3vt}{4}.$$

Teraz sa nám opäť raz oplatí spomenúť na vzorček pre rovnomerný priamočiary pohyb, a to, že rýchlosť telesa sa rovná prejdenej dráhe za čas, ktorý telesu trvalo túto dráhu prejsť ($v = \frac{s}{t}$). A keďže vieme pre obe telesá vyjadriť dráhu, ktorú prešli za určitý čas t ...

$$s_{T_1} = \frac{L}{2} - x_{T_1}(t),$$

$$s_{T_2} = L - x_{T_2}(t).$$

Teda:

$$s_{T_1} = \frac{vt}{4},$$

$$s_{T_2} = \frac{3vt}{4}.$$

...vieme vyjadriť rýchlosti:

$$v_{T_1} = \frac{v}{4},$$

$$v_{T_2} = \frac{3v}{4}.$$

Obe ťažiská sa pohybujú smerom k bodu s polohou $x = 0$ a k tomu, aby sme vyjadrili to, akou rýchlosťou sa pohybuje T_2 vzhľadom k T_1 nám už stačí iba tieto rýchlosti odčítať a teda, máme výsledok:

$$v_{T_2 k T_1} = v_{T_2} - v_{T_1} = \frac{v}{2}.$$

Ak potrebujete lepšie vysvetliť posledný myšlienkový krok, tak v podstate sme iba zmenili vzťažnú sústavu. Predstavili sme si, že my sa nachádzame v ťažisku T_1 a samozrejme, my chceme byť tí nehybní. Takže k oboj rýchlostiam pripočítame rýchlosť opačnú k našej (my sa teda nehýbame a ťažisko T_2 sa približuje rýchlosťou $v_{T_2 k T_1}$ (teda $\frac{v}{2}$) k nám).

3.4 B3/A1 – Brnkačka (opravoval Kvík)

Identita človeka je jedinečná záležitosť. Vykonávame rôzne aktivity a zaoberáme sa všeličím zaujímavým, v dôsledku čoho si o sebe vytvárame pestrý, ale jasný obraz pred zvyškom zvedavej pozorujúcej spoločnosti. Existujú ale veci, ktoré sa v daný špeciálny čas nachádzajú pre veľké množstvo ľudí na podobnej úrovni dôležitosti. Medzi tieto veci patrí napríklad potreba brnkať do gumičky, ktorá vydáva zaujímavý zvuk. Trvanie tejto potreby vie narásť so zistením, že rôznym natiahnutím gumičky vieme po brknutí dostať rôzne vysoko znejúci zvuk.

Experimentálne zmerajte frekvenciu zvuku, ktorú vydáva bežná gumička pri určitom natiahnutí z jej pôvodnej dĺžky L , ktorú si sami zvolíte. K riešeniu nezabudnite priložiť vhodné množstvo nameraných dát pre rôzne natiahnutia spolu s fotkami aparatury. Na meranie frekvencie zvuku môžete použiť niektorý z voľne dostupných programov⁴. Na záver odhadnite, aká funkcia najlepšie popisuje hľadanú závislosť frekvencie od dĺžky natiahnutia.

Teória

Isto viete, že zvuk nie je nič iné, než zmena tlaku média, v našom prípade vzduchu. Ucho zmeny tlaku zosilňuje a konvertuje na elektrický signál, ktorý sme schopní mozgom vnímať. Prakticky všetky zvuky sú zhruba periodické. To znamená, že hodnoty tlaku vzduchu, ktoré by sme namerali v niektorom bode priestoru, sa po nejakom krátkom čase začnú – aspoň približne – opakovať. Napríklad ľudské ucho vníma len zvuky s frekvenciami od približne 20 Hz po 20 kHz, o zvuku však môžeme hovoriť aj pri oveľa vyšších či nižších frekvenciách.

Najjednoduchšou, základnou periodickou funkciou je sínus⁵. Hladký sínusový zvuk však len tak nezačujeme. Vieme ho síce umelo vytvoriť (napríklad elektronicky cez reproduktory), ale prirodzene sa nevyskytuje skoro nikde. Všetky bežné zvuky sú omnoho zložitejšie, pretože ich

⁴Napríklad *Audacity*.

⁵zníe takto: <https://www.youtube.com/watch?v=rF0l-9SNxLY>

zdrojmi sú skutočné fyzické objekty, ktoré rozkmitávajú vzduch veľmi komplikovaným spôsobom.

Vibrujúca gumička síce kmitá veľmi pravidelne, ale i tak vytvára komplexný zvuk, pretože rôzne jej časti kmitajú rôzne rýchlo. Po dĺžke gumičky sa vytvárajú miesta, kde prakticky nekmitá a takisto miesta, kde je veľkosť vibrácie veľmi veľká. Každé z nich rozochvieva okolitý vzduch s inou amplitúdou a v trochu inom čase. Navyše tieto vlny spolu interferujú, takže kým zvuk dorazí k mikrofónu alebo nášmu uchu, tvar výslednej vlny už má od sínusu ďaleko. Podľa Fourierovej vety však každú aspoň trochu slušnú periodickú funkciu (čiže vlnu) dokážeme vyjadriť ako súčet nejakého radu sínusov a kosínusov:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega t$$

Fyzikálny zmysel tohoto vzorca je v tom, že pohyb celej gumičky sa v čase aspoň približne opakuje so základnou, tzv. *fundamentálnou* frekvenciou ω . V rámci jednej periódy sa však vykoná nejaký iný pohyb dvakrát, ďalší trikrát a tak ďalej. Týmto frekvenciám hovoríme *vyššie harmonické*. Naopak neceločíselné násobky základnej frekvencie interferujú deštruktívne – niečo málo z nich síce ostane, amplitúdy kmitania však budú omnoho menšie, než pri harmonických frekvenciách. Navyše vysoké frekvencie môžeme zanedbať, pretože ich tak či onak nepočujeme.

V experimente nám stačilo, aby ste odmerali fundamentálnu frekvenciu vibrujúcej gumičky. Pri meraní sme však zistili, že zaujímavé veci sa dejú aj pri vyšších harmonických frekvenciách, takže sa pozrieme aj na ne.

Meranie

Základom aparatury je mikrofón a veľmi pravdepodobne počítač alebo aspoň chytrý telefón (prípadne osciloskop ;-)). Ďalej sa celkom hodí pravítko a nejaký softvér, napríklad odporúčané Audacity.



Obr. 5: Fotka aparatury.

Najprv odmeriame dĺžku nenapnutej gumičky, u nás $l = 100$ mm. Veľmi sa nám osvedčilo gumičku najprv roztrhnúť – guma má totiž veľmi vysoký koeficient trenia. Pri napínaní kruhovej

gumičky sa ľahko môže stať, že jedna polovica bude napnutá viac ako druhá a to nám meranie dokáže úplne skaziť. Potom môžeme jeden koniec gumičky pripnúť o niečo pevné a ťažké, napríklad korkovú nástenku alebo veľký kus dreva. Druhý môžeme držať v ruke, alebo ak chceme byť veľmi presní, použijeme špendlík, ktorým budeme gumičku postupne pripichovať v rôznej vzdialenosti od prvého.

Zvuk gumičky zakaždým nahráme pomocou mikrofónu... a hneď aj môžeme začať vlnu analyzovať. Celkom dobrou metódou je napríklad odmerať čas medzi dvomi po sebe nasledujúcimi maximami alebo minimami akustického tlaku a frekvenciu vyjadriť jednoducho ako $1/t$. Vlna síce nemusí mať dobre definované jednoznačné lokálne maximum, i tak ale určite budeme vedieť nájsť dĺžku jednej periódy.

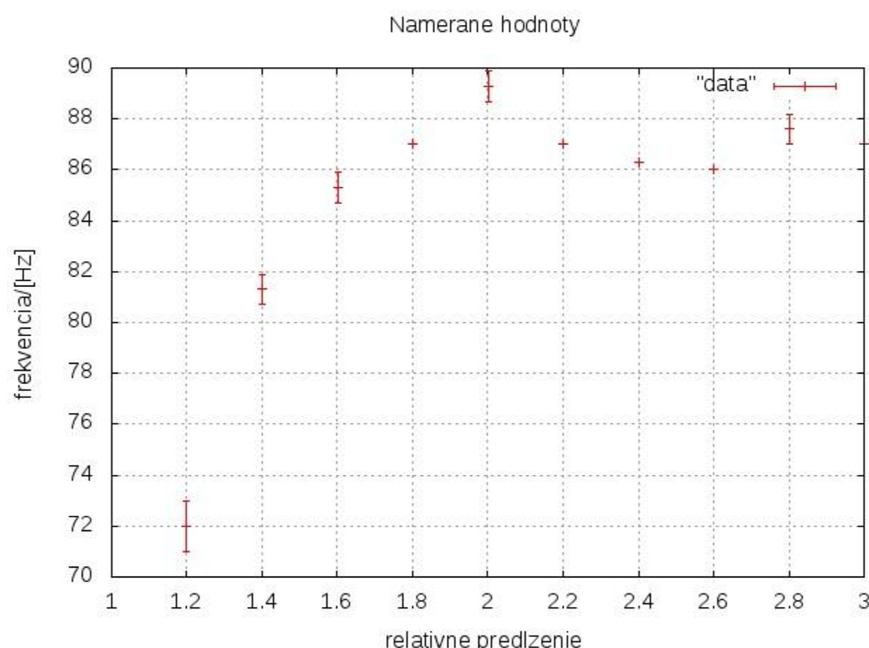
Ak však už máme poruke nejaký softvér, skoro určite to vie urobiť za nás a ešte k tomu omnoho lepšie. Meraním periódy totiž dokážeme určiť len fundamentálnu frekvenciu. Ak sa veľmi pousilujeme, všimneme si aj niektoré vyššie harmonické frekvencie, ale mnohé zaujímavé vlastnosti vlny sa nám určite stratia.

Silnejším „kladivom“ je metóda zvaná *harmonická analýza* a jej podstatou je práve hľadanie koeficientov a_n a b_n vo Fourierovom rozvoji. V Audacity túto funkcionálnu nájdeme v menu **Analyze** → **Plot Spectrum**. Softvér nami zaznamenaný zvuk sám analyzuje a nakreslí spojité spektrum s niekoľkými výraznými vrcholmi (pozri Obr.8 a Obr.7). Najvyšší z nich zodpovedá fundamentálnej frekvencii, nižšie vrcholy vpravo sú harmonické frekvencie. Všimnite si, že os x je logaritmická.

Aby sme vylúčili niektoré možné chyby, gumičku sme po každom meraní pustili a znovu napli. Každé meranie sme pre istotu opakovali trikrát pre spolu desať rôznych dĺžok – to by zvyčajne sotva stačilo, ale rozptyly nameraných hodnôt boli veľmi malé, dokonca pod rozlišovacou schopnosťou Audacity, ktorá je 1 Hz. Nedokonalosti gumičky a hlučné prostredie by nám však ani tak zrejme neumožnili dosiahnuť vyššiu presnosť.

Dĺžka l [mm]	Relatívne predĺženie q	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]	Frekvencia $\bar{f}$ [Hz]
120	1.2	72	71	73	72 ± 1
140	1.4	82	81	81	81.3 ± 0.6
160	1.6	86	85	85	85.3 ± 0.6
180	1.8	87	87	87	87 ± 0
200	2	90	89	89	89.3 ± 0.6
220	2.2	87	87	87	87 ± 0
240	2.4	87	86	86	86.3 ± 0
260	2.6	86	86	86	86 ± 0
280	2.8	88	88	87	87.6 ± 0.6
300	3	87	87	87	87 ± 0

Keď si namerané hodnoty zobrazíme v grafe, budú vyzeráť približne takto:



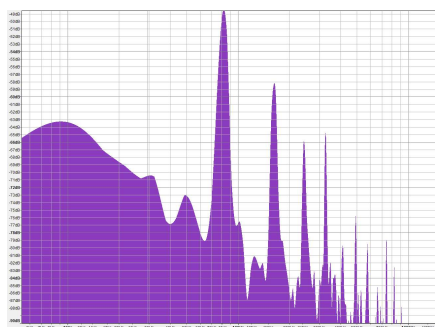
Obr. 6: Graf

Pred meraním sme očakávali, že závislosť bude aspoň približne lineárna: tón, ktorý počujeme, sa predsa určite zvyšuje s narastajúcim napätím. Dáta nám to ale vyvrátili – vidíme, že spočiatku sa s narastajúcou dĺžkou gumičky zvyšovala aj fundamentálna frekvencia, ale pri viac než 1.8-násobnom predĺžení sa ustálila približne na hodnote 87 Hz. Napriek tomu sme však stále počuli, ako výška tónu ďalej narastá. Spôsobili to práve vyššie harmonické frekvencie – hneď vidíme, že pri 1.8-násobnom predĺžení sú omnoho menej výrazné, než pri trojnásobnom. A to už stačí na to, aby sme vnímali vyšší tón.

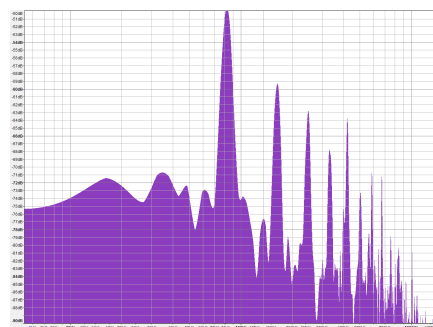
Keby sme však miesto gumičky mali napríklad gitarovú strunu, zvyšovala by sa aj fundamentálna frekvencia. Fundamentálna frekvencia stojatej vlny totiž závisí od odmocniny podielu napínajúcej sily a dĺžkovej hustoty $\lambda = m/l$:

$$f = \frac{\sqrt{\left(\frac{F_n}{m/l}\right)}}{2l} = \sqrt{\frac{F_n}{4ml}}$$

Ak napíname strunu, jej dĺžka sa s rastúcim napätím mení len veľmi málo, zatiaľ čo u gumičky bude rásť takmer lineárne. Tieto dva efekty sa potom navzájom vyrušia a fundamentálna frekvencia tak ostane zhruba rovnaká.



Obr. 7: Spektrum pri 1.8-násobnom predĺžení.



Obr. 8: Spektrum pri 3-násobnom predĺžení.

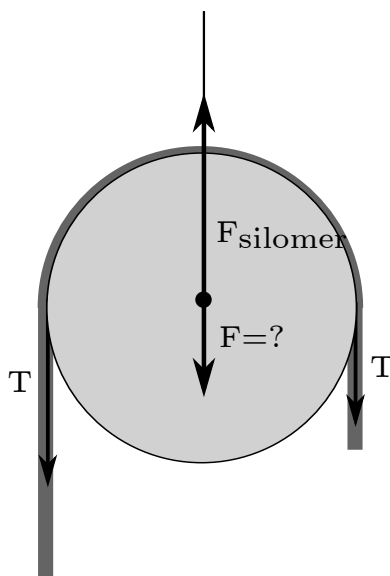
3.5 B4/A2 – Kladka a lano po iksmiliónty raz (opravoval Maťo B.)

Matej naposledy na fyzikálnom krúžku ukazoval zaujímavý experiment z mechaniky. Zobral veľmi ľahkú kladku, ktorú si zavesil na silomer a prehodil cez ňu lano dĺžky l . Narovnal voľné konce tak, aby sa sústava nachádzala v rovnovážnej polohe a následne zo silomeru vyčítal, že lano má hmotnosť m .

Vtom jeden nešikovný pohyb spôsobil, že sa lano trochu pretočilo a začalo cez kladku prepadávať na jednu stranu. Maťo si ale všimol, že silomer začal ukazovať zaujímavé hodnoty pre meranú silu. Aká je závislosť tejto sily od toho, ako hlboko sa práve nachádza nižší koniec lana? Vzdialenosť tohto konca lana od jeho pôvodnej polohy označme x .

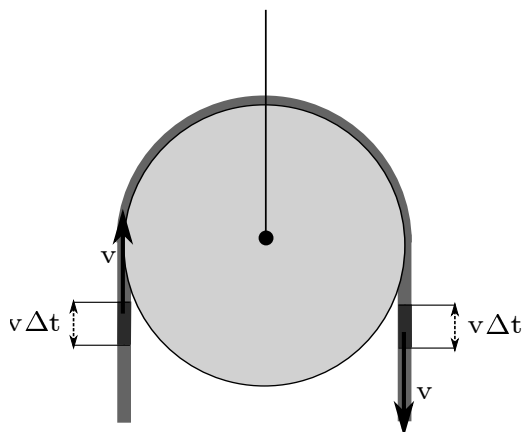
Človek by si povedal, veď čo už zaujímavé ten silomer ukáže, však veď silomer ukáže len tiažovú silu. Pozorný riešiteľ však spozoroval, že v zadaní sa vyskytlo spojenie *zaujímavý experiment*. A uznajte sami, konštantná funkcia nie je práve zaujímavá.

Najprv sa teda zamyslime, prečo to nebude konštanta. Aké sily pôsobia na kladku? Určite na kladku pôsobí napäťová sila lana T , už tá sa bude meniť počas toho, ako bude lano prepadávať cez kladku. Potom je tu ešte sila F_{silomer} , ktorou pôsobí silomer na kladku, tá zaisťuje, že kladka nespadne. Je to všetko? Na jednu silu sme predsa len ešte zabudli. Ide o silu, ktorá spôsobuje zmenu hybnosti kúskov lana, keď prejdú kladkou. Táto sila bude zrejme nejako súvisieť s rýchlosťou lana. Keďže pozícia aj rýchlosť lana nie sú konštantné, tak si vieme ľahko domyslieť, že silomer zrejme neukáže konštantnú silu. Tiaž samotnej kladky zanedbáme.



Obr. 9: Sily pôsobiace na kladku.

Ako určiť silu, potrebnú na zmenu hybnosti kúskov lana? Aby sa nám lepšie počítalo, tak si zdefinujeme dĺžkovú hustotu lana $\rho = \frac{m}{l}$ ⁶. Pre jednoduchosť zanedbáme rozmery kladky a pozrieme sa na malý kúsok lana, ktorý sa približuje ku kladke rýchlosťou v . Pred tým, než prejde kladkou, vektor rýchlosti kúska lana smeruje nahor, akonáhle však prejde kladkou, tak kúsok lana má síce stále rýchlosť v ⁷, ale vektor rýchlosti kúska lana už smeruje nadol. Na zmenu hybnosti kúska lana sme ale potrebovali silu. Akú veľkú? Za čas Δt kúsok lana dĺžky $v\Delta t$ zmení svoju rýchlosť o $\Delta v = v - (-v) = 2v$. To zodpovedá zmene hybnosti $\Delta p = m\Delta v$, a príslušnej sile F ,



Obr. 10: Zmena orientácie vektora rýchlosti po prechode kladkou.

⁶Teda koľko váži 1 m lana.

⁷Zmenu rýchlosti lana počas toho ako malý kúsok lana prechádza kladkou je možné zanedbať.

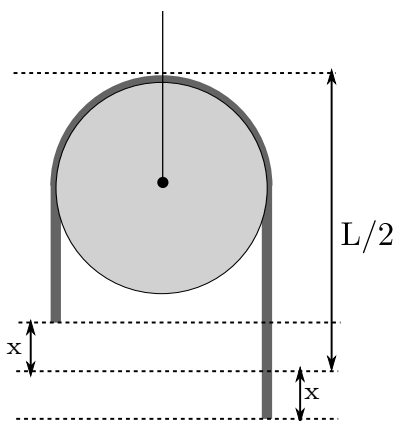
$$\Delta p = \rho v \Delta t \Delta v ,$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2\rho v^2 .$$

Teraz už poznáme naozaj všetky pôsobiace sily na kladku. Keďže vieme, že kladka sa nepohybuje, tak musí platiť rovnováha síl pôsobiacich na kladku.

$$2T - F_{\text{silomer}} = 2\rho v^2 .$$

Už nám ostáva len určiť, ako závisí rýchlosť lana v a napäťová sila T od dĺžky, o ktorú sa lano posunulo.



Obr. 11: Posunutie lana o x z rovnovážnej polohy.

Rýchlosť lana určíme zo Zákona zachovania energie. Nulovú hladinu zvolíme na vrchu kladky. Na začiatku malo lano potenciálnu energiu⁸,

$$E_{p0} = -\rho g \left(\frac{L}{2} \right)^2 .$$

Ak sa lano posunie o x , tak jeho potenciálnu energiu získame ako súčet potenciálnej energie “kratšej” a “dlhšej” časti lana.

$$E_p(x) = -\rho g \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + x \right)^2 - \rho g \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right)^2$$

Rýchlosť získame, už len jednoduchým aplikovaním zákona zachovania energie⁹,

$$E_{p0} = E_p(x) + E_k(x) ,$$

$$-\rho g \frac{L^2}{4} = -\rho g \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} + x \right)^2 - \rho \frac{1}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right)^2 + \frac{1}{2} \rho L v^2(x) ,$$

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g}{L}} x .$$

⁸Každá polovica lana má hmotnosť $\rho L/2$ a jej ťažisko sa nachádza vo vzdialenosti $L/4$ pod kladkou.

⁹Uvedená sila, totiž mení smer rýchlosti, ale nekoná prácu.

Napäťovú silu získame, tak ako je v príkladoch s kladkami zvykom, z pohybových rovníc pre dve telesá spojené vláknom. V našom prípade sú “dve telesá” kratšia a dlhšia časť lana. Zrýchlenie lana označíme a .

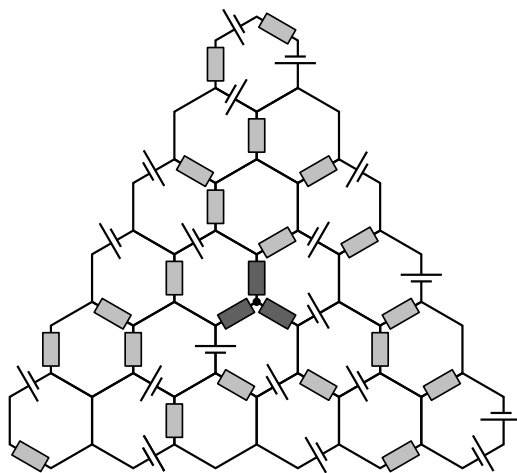
$$\begin{aligned}\rho \left(\frac{L}{2} - x \right) a &= -\rho \left(\frac{L}{2} - x \right) g + T, \\ \rho \left(\frac{L}{2} + x \right) a &= \rho \left(\frac{L}{2} + x \right) g - T.\end{aligned}$$

Ich riešením získame $a = 2gx/L$ a spätným dosadením, napríklad do prvej rovnice, získame T . Dosadením do rovnováhy síl, tak dostaneme závislosť sily F_{silomer} od x ,

$$F_{\text{silomer}} = \rho g L \left(1 - \frac{8x^2}{L^2} \right) = mg \left(1 - \frac{8x^2}{L^2} \right).$$

Všimnime si, že v istom okamihu klesne táto sila na nulu. Čo sa bude potom s lanom diať? Prestane sa dotýkať kladky a jeho koniec švihne smerom nahor.¹⁰¹¹ Lana tak cez kladku neprejde len tak nudne, ako by sme čakali. Takže nakoniec, laná a kladky nie sú až také nezaujímavé.

3.6 A3 – Elektromaze (opravoval Kubo B.)



Obr. 12: Sieť rezistorov a zdrojov

Takýto sympaticky vyzerajúci obvod stvoril Kubo počas svojich kreatívnych chvíľ. Napätia na všetkých zdrojoch nastavíme na hodnotu U a odpory rezistorov na hodnotu R . Aké prúdy pretekajú tromi rezistormi, ktoré sú najbližšie k stredu?

Spočiatku môžeme nadobudnúť pocit, že si tvorca úlohy z nás robí srandu a že sa chce kochať našim strápeným výrazom pri riešení hnusného obvodu. Možno očakáva, aby sme popísali obvod

¹⁰Skúste si to vyskúšať doma. Rýchlo ťahajte napr. dlhšiu niť prevesenú cez nejaký drôt.

¹¹Ak vás tento príklad zaujal, tak sa môžete pozrieť aj na jeho ťažšiu verziu v archíve FX.

šialenou sústavou rovníc, ktoré nakoniec musíme vyriešiť a získať riešenia pre hľadané tri prúdy. Možno chce, aby sme si taký obvod postavili a odmerali to experimentálne.

Nie a nie. To by nebolo FKS, keby riešenie úlohy malo byť takéto priamočiare a suché. Musí v tom byť niečo iné.

Notoricky známe triky a finty, ktoré sa využívajú v jednosmerných elektrických obvodoch sú napríklad: *zmenšovanie počtu rezistorov*, spájanie *ekvipotenciálnych uzlov* či hľadanie *Kirchhoffových slučiek*.

Skúsme sa pozrieť na všetky tri. Ak nič nevydá, tak je úloha hnusná a autor sa môže ísť hanbiť za nulovú originalitu do tmavého rohu. Ak to vyjde, sme za vodou.

- (i) *Zmenšovanie počtu rezistorov* funguje dobre v elektrických obvodoch, v ktorých sa nenachádza veľa zdrojov napätia. Klasickou fintou je napríklad to, že nahradíte dva rezistory, ktoré sú za sebou, jedným, a prehlásite, že obvod sa správa rovnako, ak sa jeho odpor rovná súčtu dvoch predošlých.

V našom obvode sa nachádza priveľa zdrojov, takže táto metóda tu fungovať nebude.

- (ii) *Spájanie ekvipotenciálnych uzlov* funguje spôsobom, že ak nájdeme dva uzly, na ktorých sú rovnaké elektrické potenciály, tak ich môžeme spojiť vodičom. Týmto vodičom zaručenie nebude tiecť prúd (pretože je na jeho koncoch nulové napätie) a teda ho môžeme ľubovoľne skrátiť. Až na nulu. Čiže takéto dva uzly môžeme prehlásiť za jeden.

Tento trik sa zase hojne využíva v symetrických obvodoch, kde je hľadanie uzlov s rovnakým elektrickým potenciálom úplná hračka. Naš obvod síce symetrický je, ale nie sú na ňom symetricky rozložené ani rezistory, ani zdroje napätia. Áno, môžeme vyrátať hodnoty elektrických potenciálov na jednotlivých uzloch, ale to by sme sa opäť dostali k mrakom a mrakom previazaných rovníc a zhoršeniu psychickej vyrovnanosti.

Metódu teda prehlasujeme za neefektívnu a ostáva nám dúfať, že vyjde tá posledná.

- (iii) *Hľadanie Kirchhoffových slučiek* je naša posledná záchrana. Táto metóda funguje väčšinou práve v obvodoch, kde sa nachádza veľa zdrojov napätia.

Na rozbeh si pripomeňme, čo hovoria *Kirchhoffove zákony*:

1. Kirchhoffov zákon

Pre všetky uzly v obvode platí, že koľko prúdu do neho vtečie, toľko z neho aj vytečie. Algebraicky to vieme zapísať ako:

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

pričom prúd má kladné znamienko vtedy, keď do uzlu vteká a záporné, keď vyteká.

2. Kirchhoffov zákon

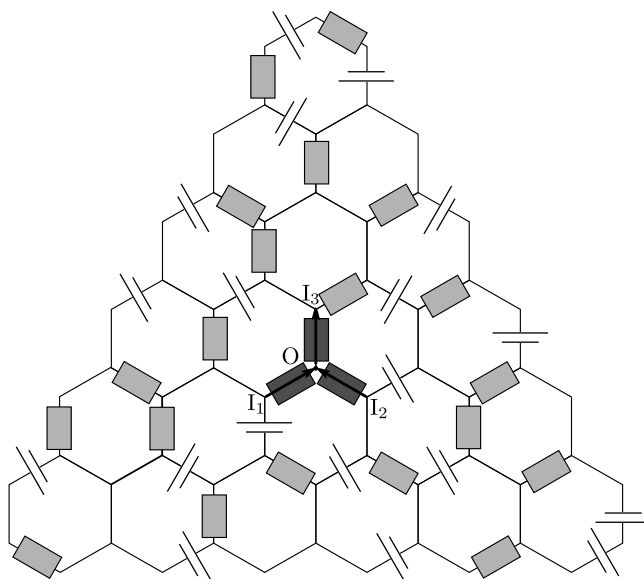
Je vlastne iba zákon zachovania energie. Hovorí, že pre každú slučku v obvode platí, že algebraický súčet napätí na tejto slučke je nulový. Čiže sa energia nehromadí. Teda, keď sčítame všetky napätia na zdrojoch a rezistoroch, tak platí:

$$\sum_{i=1}^n U_i + \sum_{i=1}^n I_i R_i = 0,$$

pričom napätia a prúdy majú kladné znamienka, ak sú ich smery v slučke orientované v protismere hodinových ručičiek. V opačnom prípade majú znamienko $-$.

Metóda *hľadania Kirchhoffových slučiek* spočíva v tom, že nájdeme v obvode takú slučku, ktorá bude obsahovať samé zdroje napätia okrem jedného rezistora. Ak sa nám toto podarí, tak vďaka druhému Kirchhoffovému zákonu vieme nájsť prúd tečúci rezistorom.

Podme sa pozrieť na náš nechutný obvod. Označme jeho stred ako bod O a prúdy aj s vytipovanými smermi toku ako I_1 , I_2 , I_3 :



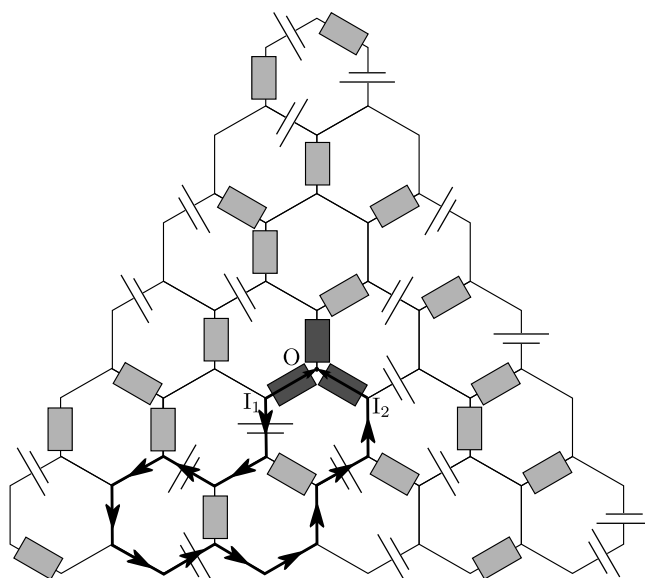
Obr. 13: Hnusný obvod zo zadania

Z prvého Kirchhoffovho zákona vieme okamžite napísať:

$$I_1 + I_2 = I_3$$

To je zatiaľ jedna rovnica o troch neznámych. Nič moc.

Podme teraz hľadať spomínané *Kirchhoffove slučky*. Vieme, že takáto slučka musí prechádzať bodom O (aby prechádzala rezistormi, na ktorých hľadáme prúdy) a minimálne (a hádam aj maximálne) dvomi rezistormi. Po chvíľke pozeania na obrázok nachádzame prvú slučku:



Obr. 14: Prvá nájdená Kirchhoffova slučka. Čierne šípky znázorňujú smer, ktorý sme si zvolili ako kladný.

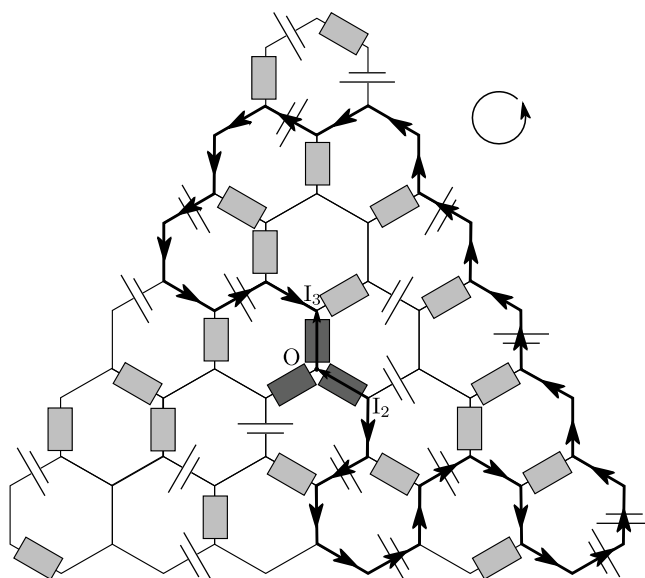
Keď sa teraz prejdeme po slučke v smere čiernych šípok a sčítame všetky napätia, ktoré po ceste stretneme (kladné sú tie, ktoré sú v našom smere a záporné tie, ktoré sú proti nám), tak dostávame:

$$-I_1 R + U - U - U - U + I_2 R = 0$$

$$I_2 - I_1 = \frac{2U}{R}$$

Teraz už mám dokopy dve rovnice o troch neznámych. Evidentne treba nájsť ešte druhú slučku, ktorá prechádza inou dvojicou rezistorov. Prvú sme už našli a zjavne to nebola náhoda, takže sa opäť poriadne zahľadíme na obrázok a hľadájme.

Ladies and gentlemen, tu hľa:



Obr. 15: Druhá nájdená Kirchhoffova slučka. Značne väčšia.

Keď už sme našli slučku, využijeme ten istý zákon¹²:

$$-I_2 R + 7U - 3U - I_3 R = 0$$

$$I_2 + I_3 = \frac{4U}{R}$$

Juchú! Máme tri rovnice o troch neznámych, ktoré už vieme riešiť. Napíšme si ich pekne pod seba:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$I_2 - I_1 = \frac{2U}{R}$$

$$I_2 + I_3 = \frac{4U}{R}$$

Všímavejší vidia, že keď všetky tri rovnice sčítame, vieme okamžite vyrátať I_2 :

$$3I_2 = \frac{6U}{R} \quad \rightarrow \quad I_2 = \frac{2U}{R}$$

A z toho už aj zvyšné I_1 a I_3 :

$$I_1 = \frac{2U}{R} - I_2 = 0 \quad I_2 = \frac{2U}{R} \quad I_3 = \frac{4U}{R} - I_2 = \frac{2U}{R}$$

¹²Z dôvodu prehľadnosti rovnice už nerozpisujeme jednotlivé algebraické sčítavania zdrojov na slučke. Vidíme, že tých, ktoré majú rovnaký smer ako čierne šípky, je 7 a tie, ktoré majú smer opačný, sú 3.

Z tohoto výsledku vidíme niekoľko vecí. Prvou z nich je to, že všetky znamienka vo výsledkoch máme nezáporné. To znamená, že na začiatku, kedy sme tipovali, akým smerom budú tiecť prúdy I_1, I_2, I_3 , tak sme si tipli **správne**.

Druhou zaujímavou vecou je, že prúd I_1 vyšiel nulový. To znamená, že medzi uzlom O a uzlom ležiacim hneď vľavo za rezistorom nie je žiadne napätie. To znamená, že majú rovnaký elektrický potenciál a teda môžeme rezistor vyhodiť a tieto uzly spojiť.

Slávnostne môžeme prehlásiť, že sme úlohu vyriešili :-)

3.7 A4 – Nuapurista kuulu se polokan tahti... (opravoval Maťo B.)

„Uff, konečne!“ - vydýchol si Dušan, keď po troch sériach doupratoval šopy a povyhadzoval smeti typu páčidlo, dutá valcová trubica,... Vtom si všimol, že v tmavom kúte šopy leží ešte jedna, prachom zapadnutá, podlhovastá vec. So zadržaným dychom ju zdvihol a rozžiaril sa mu úsmev na tvári. Bola to totiž jeho obľúbená flauta z detských čias. Keď sa uistil, že v jej vnútri neprebýva žiaden infarktsposobujúci živočích, oprášil ju a zahral si levan Polkku¹³.

Neprešiel dlhý čas, a Dušan už bol na ceste smerom na Priečne sedlo, pričom po ceste sa snažil si spomenúť na všetky pesničky, ktoré z detstva pozabúdal. Na vrchole si chcel symbolicky opäť zahrať levan Polkku, ale keď začal, rýchlo prestal. Dušan si totiž všimol, že flauta mu hrá akosi inak...

Vypočítajte, ako veľmi sa zmenila frekvencia komorného a, ktoré Dušan hral na flaute na vrchole Priečného sedla oproti situácii, keď sa ešte nachádzal v blízkosti šopy. Predpokladajte, že v okolí šopy bola normálna teplota (20°C) a tlak (10^5Pa). Ďalej uvažujte idealizovanú atmosféru, ktorej tlak a teplota sa mení s výškou adiabaticky. Na záver prezrádzame, že Dušanova chata sa nachádza v Starom Smokovci.

Prirodzená otázka po prečítaní zadania je, prečo by sa mala vôbec frekvencia zvuku flauty meniť? Na jej zodpovedanie si musíme ujasniť, ako vzniká zvuk vo flaute. Jej vnútro funguje ako rezonančná komora s otvoreným koncom. Frekvenciu tónu zmeníme tak, že položíme prsty na iné otvory, a tak zmeníme dĺžku časti flauty, v ktorej vzduch rezonuje. Zvuk je produkovaný v okamihu, ako vzduch narazí na ostrú hranu otvoru a je nútený rezonovať.¹⁴ Vypočítať, aké presné musí byť rozostavenie otvorov a aké veľké musia byť, aby vytvorili nejaký ľubozvučný tón, nie je v skutočnosti až také ľahké, ako sa môže na prvý pohľad zdať.¹⁵ Dobrou správou je, že mi takéto problémy v skutočnosti riešiť nemusíme, keďže už predpokladáme, že zručný výrobca flaut umiestnil otvory tak, že flauta vydá zo seba perfektné *komorné A*, ak položíme prsty na správne miesta :). Čím je teda určená frekvencia zvuku f ? Jednoducho rýchlosťou zvuku c a efektívnou dĺžkou vzduchového stĺpca L_{ef} .¹⁶

$$f_{(A)} \sim \frac{c}{L_{\text{ef}(A)}}.$$

V zadaní sme vám trošku pomohli, keď sme povedali, že máte uvažovať *adiabatickú atmosféru*.¹⁷ Šikovný riešiteľ určite si nájde či vypočíta, že so zmenou výšky sa v takejto atmosfére

¹³<https://www.youtube.com/watch?v=4om1rQKPjI>

¹⁴Viac o tom, ako funguje flauta môžete nájsť na <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/music/flute.html>.

¹⁵Pri vytváraní hudobných nástrojov si totiž už nevystačíme s jednoduchými modelmi, ale musíme zobrať do úvahy aj okrajové efekty prúdenia vzduchu.

¹⁶Samozrejme, až na číselnú konštantu spôsobenú tým, že vlnová dĺžka nie je priamo dĺžka vzduchového stĺpca.

¹⁷Ide o druhý najjednoduchší model atmosféry hneď po *izotermickej atmosfére*, tú ale, zo zjavných príčin, na odhad zmeny teploty vzduchu použiť nemôžeme.

mení teplota vzduchu. A čo sa mení s teplotou? Okrem iného, dĺžka materiálov a rýchlosť zvuku. So stúpajúcou výškou sa mení aj zloženie atmosféry. Na čo najlepší odhad zmeny frekvencie musíme posúdiť veľkosť týchto efektov. Pustime sa teda do práce!

Adiabatická atmosféra

Najprv skúsme odhadnúť, aká je teplota v Priečnom sedle, ak v Starom Smokovci je práve 20°C . Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že vzduch je ideálny plyn, takže môžeme použiť stavovú rovnicu ideálneho plynu. Taktiež budeme predpokladať, že atmosféra je v hydrostatickej rovnováhe, a teda na každý jej kúsok musí byť súčet pôsobiacich síl rovný nule. Samozrejme zanedbáme inverziu počasia a podobné javy.

Ak sa pozrieme na vrstvu atmosféry s plochou dS a s hrúbkou dh nachádzajúcou sa vo výške h , tak tlaková sila vzduchu $p(h)dS$ pôsobiaca zdola musí kompenzovať tiaž tejto tenkej vrstvy, s hustotou $\rho(h)$, a tlakovú silu vzduchu všetkých vrstiev atmosféry nachádzajúcich sa nad touto vrstvou $p(h+dh)dS$.

Matematicky zapísané a predelené plošným elementom dS ,

$$\begin{aligned} p(h+dh) + \rho(h)gdh &= p(h), \\ \frac{p(h+dh) - p(h)}{dh} &= -\rho(h)g, \\ \frac{dp}{dh} &= -\rho(h)g. \end{aligned} \quad (1)$$

Hustotu vzduchu vieme určiť zo stavovej rovnice na základe mólovej hmotnosti vzduchu M_m ,

$$\begin{aligned} pV &= nRT, \\ pV &= \frac{m}{M_m}RT, \\ \rho &= \frac{pM_m}{RT}, \end{aligned}$$

aby sme nezabudli, že tlak aj teplota sú funkciami výšky, tak nezabudneme pripísať (h) .

$$\rho(h) = \frac{p(h)M_m}{RT(h)}, \quad (2)$$

Vložením do prvej rovnice sa nám podarí vylúčiť hustotu z našich rovníc.¹⁸

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{p(h)M_m}{RT(h)}g. \quad (3)$$

Nebudeme uvažovať zmenu zloženia atmosféry s meniacou sa výškou a mólovú hmotnosť vzduchu budeme pokladať za konštantnú.

Zatiaľ máme iba jednu rovnicu, ale až dve hľadané funkcie ($p(h)$ a $T(h)$). Preto potrebujeme ešte rovnicu, ktorá nám pomôže “zbaviť sa” nepotrebného tlaku. Na to nám práve pomôže predpoklad *adiabatickej atmosféry* t.j. takej, v ktorej sa vzduch dokonale premiešava. *Adiabatickosť*

¹⁸Zbytočne by sme totiž počítali niečo, čo nepotrebujeme.

atmosféry pramení z faktu, že vzduch je veľmi zlý vodič tepla, takže môžeme zanedbať tepelnú výmenu medzi kúskom vzduchu a jeho okolím pri tom, ako sa tento vzduch dostáva do vyšších vrstiev atmosféry.¹⁹

Pre ideálny plyn a vratné adiabatické deje platí, že

$$\begin{aligned}\frac{pV}{T} &= \text{konšt.}, \\ pV^\gamma &= \text{konšt.}.\end{aligned}$$

My by sme však potrebovali, aby nejaký výraz obsahujúci tlak a teplotu bol tiež konštanta. Po krátkom zamyslení nezostaneme sklamaný, keď si uvedomíme, že aj²⁰

$$p^{1-\gamma}T^\gamma = \text{konšt.}.$$

Ako tento poznatok vhodne využiť? Tak, že tento vzťah zdiferencujeme²¹ a získame tak druhú rovnicu obsahujúcu len tlak a teplotu.

$$\begin{aligned}(1-\gamma)p^{-\gamma}T^\gamma dp + \gamma p^{1-\gamma}T^{\gamma-1}dT &= 0, \\ \implies \frac{dp}{p(h)} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T(h)}.\end{aligned}\tag{4}$$

Vložením do rovnice (3) s potešením zisťujeme, že teplota s výškou lineárne klesá.

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M_m g}{R} \implies T(h) = T(0) - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{M_m g}{R} h$$

Adiabatická konštanta vzduchu je približne $\gamma = 1,4$ ²² a mólová hmotnosť $M_m = 28,96 \text{ g mol}^{-1}$. Vďaka čomu vieme odhadnúť teplotu na Priečnom sedle, ktoré sa nachádza o približne 1340 m vyššie ako Starý Smokovec, na približne $T_p = 7^\circ\text{C}$. Mólovú hmotnosť vzduchu možno považovať za konštantú, keďže zmena zloženia atmosféry začína byť relevantná až pri výškach rádovo 100 km.²³

Rýchlosť zvuku vo vzduchu

Teraz potrebujeme ešte zistiť ako závisí rýchlosť zvuku na teplote. Môžeme si nájsť inžiniersky vzťah²⁴,

$$c(t) \approx (331,3 + (0,6 \cdot t)) \text{ ms}^{-1},$$

¹⁹Môžeme si to predstaviť tak, že potenciálnu energiu, ktorú kúsok vzduchu získa, keď ho vynesieme vyššie, tento kúsok vzduchu nutne stratí zo svojej vnútornej energie, keďže energia sa musí zachovať a vzduch je veľmi zlý vodič tepla, a teda efektívne nestihne prijať ani odovzdať žiadne teplo. Pozor, toto možno tvrdiť iba pre adiabatické deje.

²⁰Stačí vydeliť druhú rovnicu prvou umocnenou na γ -tu.

²¹Teda zistíme, ako medzi sebou súvisia zmeny jednotlivých veličín. Ako keby sme derivovali podľa nejakej tretej premennej, a potom to, čo dostaneme, vynásobili diferenciálom tejto premennej.

²²Keďže dusík aj kyslík sú v atmosfére v podobe dvojatómových molekúl.

²³Skutočný dôvod prečo sa horolezcom zle dýcha, je len samotná nižšia hustota atmosféry, nie zmena percentuálneho zastúpenia jednotlivých plynov.

²⁴http://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound\#Practical_formula_for_dry_air

kde t je teplota v stupňoch Celsia. Dá sa ukázať, že mechanické vlny²⁵, a teda aj zvuk sa vo vzduchu šíria rýchlosťou

$$c(T) = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M_m}}.$$

Za predpokladu malej zmeny teploty $\Delta t \ll T$ možno odhadnúť rýchlosť zvuku pri teplote $T + \Delta T$ za pomoci Taylorovho rozvoja, čím dosadením číselných hodnôt dostaneme horeuvedený “inžiniersky” vzťah.

$$c(T + \Delta T) \approx \sqrt{\gamma \frac{RT}{M_m}} + \frac{1}{2} \sqrt{\gamma \frac{R}{M_m T}} \Delta T.$$

Dosadením našej zmeny teploty ľahko zistíme, že relatívna zmena rýchlosti zvuku je približne rovná $\frac{\Delta c}{c} \approx -2 \cdot 10^{-2}$.

Ďalšie efekty

9-bodové riešenie by okrem odhadu malo obsahovať aj posúdenie, ktoré efekty majú najväčší vplyv, a ktoré naopak môžeme zanedbať. Dobrá rada do života fyzika je, že ak niečo zanedbávam, tak musím mať argument, prečo môžem toto zanedbanie urobiť.

Zamyslime sa teda, čo by ešte mohlo mať vplyv. Okrem spomínaných efektov “počasie” by mohla mať vplyv ešte tepelná rozťažnosť samotnej flauty. Keďže sa ale dĺžka vzduchového stĺpca nachádza v menovateli, tak tepelná rozťažnosť má opačný vplyv ako zmena rýchlosti zvuku, a naopak frekvenciu zvyšuje. Tu môže taktiež zavážiť či je flauta z dreva alebo je kovová. Koeficient tepelnej rozťažnosti pre drevo a kovy sa pohybuje v rozmedzí $10^{-5} - 10^{-6} \text{K}^{-1}$. To znamená, že relatívna zmena dĺžky flauty sa pohybuje na úrovni $\frac{\Delta l}{l} \approx -1 \cdot (10^{-4} - 10^{-5})$. Čo je rádovo menej ako relatívna zmena rýchlosti zvuku.

Zmena frekvencie tónu

Relatívnu zmenu rýchlosti zvuku určíme na základe prvej rovnice, vydelením výrazu pre f' a f ,

$$\frac{f'}{f} = \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta l}{l}}\right) \approx \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) \approx 0,975.$$

Otázkou ešte je, či je tento rozdiel frekvencie počuteľný. V hudbe sa na označenej logaritmickej vzdialenosti tónov používa jednotka *Cent*.²⁶

$$n = 1200 \cdot \log_2 \left(\frac{f'}{f}\right) \approx -42 \text{ Cent}.$$

²⁵Drtiči si to môžu skúsiť odvodiť ako cvičenie na základe adiabatickosti daného procesu.

²⁶[http://en.wikipedia.org/wiki/Cent_\(music\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Cent_(music))

Posunu o poltón zodpovedá vzdialenosť 100 Cent. Najmenší počuteľný rozdiel je približne 5 – 6 Cent, takže to zrejme počuteľné bude. Aby ste si vytvorili predstavu, tak si to môžete vypočúť tu ²⁷.

²⁷<http://fks.sk/~matob/flauta.mp3> Prvé tri sekundy sú komorné A, ďalšie posunuté komorné A o –42 centov, čo už je počuť. Ďalšie tri sekundy tvoria oba tóny súčasne, kedy je už zreteľne počuť, že dochádza k interferencii, ktorá nie je práve ľubozvučná.